Shortlist Soal OSN Matematika 2015

Olimpiade Sains Nasional ke-14
Yogyakarta, 18-24 Mei 2015

Aljabar

A1 Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan periodik, jika f bukan fungsi konstan dan terdapat bilangan real positif p dengan sifat $f(x) = f(x+p)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Bilangan real positif terkecil p yang memenuhi kondisi $f(x) = f(x+p)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dinamakan periode dari f. Diberikan a dan b bilangan real positif. Tunjukkan bahwa terdapat fungsi periodik f_1 dan f_2, dengan periode berturut-turut a dan b, yang memenuhi $f_1(x) \cdot f_2(x)$ juga fungsi periodik.

Catatan. Soal dapat diubah menjadi soal mudah.

A2 Misalkan α suatu bilangan real sehingga terdapat suatu polinom tidak konstan $P(x)$ yang memenuhi

$$\frac{P(x+1) - P(x)}{P(x+\pi)} = \frac{\alpha}{x+\pi}$$

untuk setiap bilangan real x dengan $x + \pi \neq 0$ dan $P(x+\pi) \neq 0$. Tunjukkan bahwa α suatu bilangan asli.

Komentar. Untuk setiap bilangan asli α, memang ada polinom yang memenuhi persamaan di atas. Versi soal yang lebih sulit adalah menentukan semua bilangan real α sehingga persamaan polinom di atas memiliki solusi $P(x)$.

A3 Misalkan a, b, c bilangan real positif dengan $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Buktikan ketaksamaan

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab+1}} + \frac{b+c}{\sqrt{bc+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{ca+1}} \leq 3.$$

A4 Misalkan $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang memenuhi:

(i) $f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = \max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\}$ untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan

(ii) terdapat sebuah bilangan real a sehingga $f(x, a) = f(a, x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Tunjukkan bahwa $f(x, y) = f(y, x)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$.

Formulasi alternatif: Cari semua fungsi $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kedua syarat berikut sekaligus:

(i) $f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = \max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\}$ untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan

(ii) terdapat sebuah bilangan real a sehingga $f(x, a) = f(a, x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

A5 Misalkan a, b, c bilangan real positif. Buktikan ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c}} \geq 3.$$

A6 Misalkan pasangan fungsi $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ memenuhi persamaan fungsi

$$f(g(x)y + f(x)) = (y + 2015)\, f(x).$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(a) Buktikan bahwa $g(x) = f(x)/2015$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Berikan contoh pasangan fungsi yang memenuhi persamaan di atas dan $f(x), g(x) \geq 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}^+$.

Catatan: Notasi $\mathbb{R}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan real positif.

Komentar: Persamaan di atas memiliki tak berhingga banyak solusi pasangan fungsi. Namun jika 2015 diganti dengan suatu bilangan λ dengan $0 < \lambda < 1$, maka persamaan fungsi yang baru ini memiliki solusi tunggal $f(x) = \lambda x$ dan $g(x) = x$ untuk semua $x \in \mathbb{R}^+$ dan tidak ada solusi lain.

A7 Suatu polinom tidak konstan $P(x)$ memiliki koefisien bulat tak negatif dan memenuhi sifat $\sum_{i=1}^{n} P(i)$ membagi $nP(n+1)$ untuk setiap bilangan asli n.

Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat $k \geq 0$ sehingga

$$P(n) = \binom{n+k}{n-1} P(1)$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Geometri

G1 Diberikan segi empat talibusur $ABCD$ sehingga $AB = AD$ dan $AB+BC < CD$. Buktikan bahwa sudut ABC lebih dari 120 derajat.

G2 Dua lingkaran yang tidak sama besarnya bersinggungan di luar di titik R. Misalkan titik P adalah perpotongan dari garis singgung sekutu luar dari dua lingkaran tersebut. Misalkan A dan B dua titik pada lingkaran yang berbeda sehingga RA tegak lurus dengan RB. Perlihatkan bahwa garis AB memuat P.

G3 (Selected) Diberikan segitiga ABC dengan lingkaran luar L_1 dan lingkaran dalam L_2. Jika titik X, Y, Z terletak pada L_1 sehingga XY, XZ menyinggung L_2 maka buktikan bahwa YZ juga menyinggung L_2.

G4 Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$, misalkan D titik tengah AC. Lingkaran luar dari segitiga DBC memotong garis tinggi dari A di titik E di dalam segitiga ABC, dan lingkaran luar dari segitiga AEB memotong sisi BD di titik F. Jika CF memotong AE di titik G, buktikan bahwa $AE = EG$.

G5 Diberikan segitiga lancip ABC. Misalkan Γ_1 lingkaran dengan pusat terletak pada sisi AC dan menyinggung sisi AB dan BC, dan misalkan Γ_2 lingkaran dengan pusat terletak pada sisi AB dan menyinggung sisi AC dan BC. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 berpotongan di dua titik P dan Q. Tunjukkan bahwa jika A, P, Q kolinear, maka $AB = AC$.

G6 Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik D. Misalkan P titik pada sisi BC. Garis melalui P tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di E dan F. Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q. Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$.

G7 Diberikan segitiga lancip ABC. Lingkaran Γ_B adalah lingkaran yang melewati AB dan menyinggung AC pada A dan berpusat di O_B. Definisikan serupa untuk Γ_C dan O_C. Misalkan garis tinggi segitiga ABC dan B dan C memotong lingkaran luar segitiga ABC pada X dan Y. Buktikan A, titik tengah XY, dan titik tengah O_BO_C segaris.

G8 Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$. Γ_B adalah lingkaran yang melewati AB dan menyinggung AC pada A. Definisikan serupa untuk Γ_C. Misalkan D adalah perpotongan Γ_B dan Γ_C dan M titik tengan BC. AM memotong Γ_C pada E. Jika O adalah pusat lingkaran luar segitiga ABC. Buktikan lingkran luar segitiga ODE menyinggung Γ_B.

Kombinatorika

C1 Diberikan bilangan asli n. Misalkan N adalah banyak maksimum gajah yang dapat diletakkan pada papan catur berukuran $2 \times n$ sehingga tidak ada dua gajah yang saling menyerang. Tentukan banyaknya cara meletakkan N gajah pada papan catur berukuran $2 \times n$ sehingga tidak ada dua gajah yang saling menyerang.

Formulasi Alternatif: Tentukan banyaknya cara meletakkan 2015 *gajah pada papan catur berukuran* 2×2015 *sehingga tidak terdapat dua gajah yang saling menyerang.*

C2 Diberikan $2n$ bilangan asli, sehingga rata-rata aritmatika $2n$ bilangan tersebut adalah 2. Jika semua bilangan tersebut nilainya tidak lebih dari $2n$. Buktikan kita bisa membagi $2n$ bilangan tersebut menjadi 2 himpunan, sehingga jumlah masing masinganggota tiap himpunan adalah sama.

C3 Diberikan 2015 buah kelereng dalam kotak, di mana setiap kelereng memiliki salah satu warna dari merah, hijau, dan biru.

Pada setiap langkah, kita diijinkan untuk mengambil 2 kelereng yang berbeda warna, kemudian menggantinya dengan 2 kelereng dengan warna ketiga. Misalnya, kita ambil satu kelereng biru dan satu kelereng hijau, dan kita mengisi dengan 2 kelereng merah.

Buktikan bahwa kita selalu dapat melakukan serangkaian langkah sehingga semua kelereng dalam kotak memiliki warna yang sama.

C4 Suatu papan catur berukuran $2m \times n$. Tentukan semua m dan n yang mungkin sehingga jika tepat $m \cdot n$ persegi kecil dalam papan tersebut diberi warna merah maka selalu ada baris atau kolom yang tepat setengah diantara persegi-persegi kecil di dalamnya berwarna merah.

C5 Suatu pertemuan dihadiri oleh n orang. Mereka dipersilahkan menempati k meja yang telah disediakan ($k \leq \frac{n}{2}$). Setiap meja minimal ditempati oleh dua orang. Pada saat pertemuan dimulai, moderator memilih dua orang dari setiap meja sebagai wakil untuk bicara. Misalkan A adalah banyaknya cara memilih wakil-wakil untuk bicara tersebut. Tentukan nilai maksimal dari A yang mungkin.

C6 Misalkan k adalah bilangan asli yang tetap.

Pada garis bilangan real yang tak berhingga, setiap bilangan bulat diwarnai dengan warna ..., merah, hijau, biru, merah, hijau, biru , ... dan seterusnya.

Sejumlah kutu loncat mula-mula hinggap pada titik-titik bilangan bulat. Pada setiap giliran, seekor kutu akan melompati kutu yang lain sehingga jaraknya k kali jarak semula.

Secara formal, kita boleh memilih 2 ekor kutu A, B yang berjarak n dan memindahkan A ke sisi yang berbeda dari B sehingga jaraknya sekarang adalah kn.

Beberapa kutu boleh menempati titik yang sama karena kita anggap ukuran kutu sangat kecil.

Tentukan semua nilai k sehingga, sebagaimanapun posisi awal para kutu, kita selalu dapat memperoleh posisi di mana semua kutu hinggap pada warna yang sama.

C7 Tunjukkan bahwa terdapat himpunan bagian A dari $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ yang bersifat

(a) $|A| = 12$

(b) untuk setiap pewarnaan bilangan-bilangan di A dengan merah atau putih selalu ditemukan beberapa bilangan sewarna di A yang hasil penjumlahannya adalah 2015.

C8 Diketahui ada 3 buah gedung identik yang lokasinya membentuk segitiga sama sisi. Masing-masing gedung memiliki 2015 lantai, dan setiap lantai di atas lantai 1 memiliki tepat satu penghuni dan 1 jendela. Kusen jendela ini akan diwarnai dengan salah satu dari merah, hijau, atau biru.

Dari setiap lantai, sang penghuni dapat melihat warna jendela kedua gedung lainnya untuk lantai yang sama dan satu lantai tepat dibawahnya. (Misalnya, penghuni lantai 10 dapat melihat jendela lantai 9 dan 10 untuk kedua gedung lainnya, total 4 jendela).

Kita ingin mewarnai jendela-jendela tersebut agar setiap penghuni dapat melihat paling sedikit 1 jendela dari setiap warna. Ada berapa cara mewarnai jendela tersebut?

Keterangan:

Lantai 1 untuk setiap gedung tidak ada penghuninya, namun jendelanya tetap harus dicat, karena terlihat oleh penghuni lantai 2 dari gedung yang lain.

Sang penghuni tidak dapat melihat warna jendelanya sendiri maupun jendela lantai lain di gedungnya sendiri.

C9 Diberikan 2015 bola, Astri dan Budi akan bermain game. Pertama, Astri memilih dua bilangan berbeda a, b dari himpunan $S = \{1, 2, \cdots, 30\}$. Kemudian Budi memilih dua bilangan berbeda c, d dari 28 angka yang tersisa dari S. Lalu secara bergilir dimulai dari Astri, mereka mengambil bola* dengan syarat berikut:

- Astri hanya boleh mengambil a atau b bola
- Budi hanya boleh mengambil c atau d bola

hingga seseorang tidak bisa mengambil bola dengan syarat yang diberikan (orang itu kalah). Buktikan bahwa Budi dapat memilih c, d sedemikan rupa** sehingga dia memiliki strategi untuk memenangkan game ini.

Klarifikasi :
*Astri dan Budi hanya memilih nilai a, b, c, d sekali (tidak memilih nilai yang baru setiap kali mereka selesai mengambil bola)
**Nilai c, d boleh tergantung dari nilai a, b yang dipilih sebelumnya.

Teori Bilangan

N1 Sebuah tripel bilangan bulat (a, b, c) disebut *brilian* apabila sekaligus memenuhi:

(a) $a > b > c$ adalah bilangan-bilangan prima

(b) $a = b + 2c$

(c) $a + b + c$ adalah bilangan kuadrat sempurna

Carilah nilai minimal dari abc apabila (a, b, c) adalah tripel brilian.

N2 Misalkan a, b adalah bilangan asli sehingga semua akar dari $x^2 + ax - b$ dan $x^2 - ax + b$ merupakan bilangan bulat. Tunjukkan bahwa terdapat segitiga siku-siku yang panjang sisi-sisinya bulat, dengan panjang sisi miringnya a dan luasnya b.

N3 Misalkan a, b, c, d adalah bilangan asli sehingga $a \mid c^d$ dan $b \mid d^c$. Buktikan bahwa

$$ab \mid (cd)^{\max\{a,b\}}.$$

N4 Misalkan bilangan asli a, b, c, d memenuhi persamaan

$$a^a b^{a+b} = c^c d^{c+d}.$$

(a) Jika $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$, buktikan bahwa $a = c$ dan $b = d$.

(b) Apakah kesimpulan $a = c$ dan $b = d$ berlaku tanpa syarat $\gcd(a, b) = \gcd(c, d) = 1$?

N5 Diberikan suatu bilangan prima $n \geq 5$. Buktikan untuk sembarang bilangan asli $a \leq \frac{n}{2}$, kita dapat mencari bilangan asli $b \leq \frac{n}{2}$ sehingga banyaknya solusi bulat non-negatif (x, y) dari persamaan

$$ax + by = n$$

adalah ganjil*.

Klarifikasi:
*Misal ketika $n = 7, a = 3$, kita bisa memilih $b = 1$ sehingga banyaknya solusi dari $3x + y = 7$ adalah 3 (ganjil) yakni: $(0, 7), (1, 4), (2, 1)$.

N6 Didefinisikan $\mathbb{N}_0$ sebagai himpunan semua bilangan bulat non-negatif. Himpunan $S \subset \mathbb{N}_0$ dengan tak hingga banyaknya elemen dikatakan cantik jika untuk setiap $a, b \in S$ dengan $a \geq b$ (a dan b tidak harus berbeda), tepat satu dari $a+b$ atau $a-b$ berada di S. Himpunan $T \subset \mathbb{N}_0$ dengan tak hingga banyaknya elemen dikatakan memesona jika bilangan terbesar k sedemikian hingga $3^k | a$ adalah sama untuk setiap elemen $a \in T$. Buktikan bahwa setiap himpunan yang cantik pasti memesona.

N7 Untuk setiap bilangan asli a, b notasikan dengan $[a, b]$ kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b dan notasikan dengan (a, b) faktor persekutuan terbesar dari a dan b. Tentukan semua bilangan asli n sehingga

$$4\sum_{k=1}^{n}[n,k] > \sum_{k=1}^{n}(n,k) + 2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n,k)}$$

N8 Bilangan asli n dikatakan *baik* jika terdapat bilangan asli a dan b yang memenuhi $a+b=n$ dan $ab|n^2+n+1$.

(a) Tunjukkan bahwa ada tak berhingga banyak bilangan *baik*

(b) Tunjukkan bahwa jika n bilangan *baik*, maka $7 \nmid n$.

Komentar. Pilih salah satu dari (a) atau (b) saja untuk dijadikan soal.