Shortlist Soal OSN Matematika 2014

Olimpiade Sains Nasional ke-13
Mataram, Nusa Tenggara Barat, 2014

p

Kontributor

Komite Pemilihan Soal OSN Matematika 2014 menyampaikan rasa terima kasihnya kepada para penyumbang soal berikut.

Fajar Yuliawan, Nanang Susyanto, Soewono, Ivan Wangsa, Aleams Barra, Rudi Prihandoko, Al Haji Akbar, Purwanto, Reza Wahyu Kumara

Aljabar

A1. Misalkan a, b merupakan bilangan real positif sedemikian sehingga terdapat takberhingga banyaknya bilangan asli k yang memenuhi

$$\lfloor a^k \rfloor + \lfloor b^k \rfloor = \lfloor a \rfloor^k + \lfloor b \rfloor^k.$$

Buktikan bahwa

$$\lfloor a^{2014} \rfloor + \lfloor b^{2014} \rfloor = \lfloor a \rfloor^{2014} + \lfloor b \rfloor^{2014}.$$

A2. Suatu barisan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \ldots$ memenuhi

$$a_k + a_l = a_m + a_n$$

untuk setiap bilangan asli k, l, m, n dengan $kl = mn$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m \mid n$ berlaku $a_m \leq a_n$.

A3. Buktikan untuk setiap bilangan real positif x, y, z, ketaksamaan berikut berlaku

$$\frac{x^2y}{x+2y} + \frac{y^2z}{y+2z} + \frac{z^2x}{z+2x} < \frac{(x+y+z)^2}{8}.$$

A4. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, c dengan $1 \leq a, b, c \leq 8$ berlaku ketaksamaan

$$\frac{a+b+c}{5} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

A5. Tentukan bilangan asli terbesar m sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real tak negatif $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2014} \geq 0$ berlaku

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2014}^2}{2014}}.$$

A6. Tentukan semua polinom $P(x)$ dengan koefisien bulat sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku berlaku $P(a), P(b), P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.

Kombinatorika

C1. Apakah mungkin menempatkan angka-angka 1,2,..., 9 ke dalam papan catur berukuran 3×3 sehingga setiap dua persegi yang bertetangga baik secara vertikal ataupun horizontal jumlah dari dua bilangan yang ada di dalamnya selalu prima?

C2. Tunjukkan bahwa banyaknya warna terkecil yang diperlukan untuk mewarnai bilangan-bilangan $1, 2, \cdots, 2013$ sehingga untuk setiap dua bilangan a, b yang berwarna sama, ab *bukan* kelipatan 2014, adalah 3 warna.

C3. Misalkan n adalah suatu bilangan asli. Diberikan papan catur berukuran $m \times n$. Sisi-sisi dari persegi kecil papan catur ini yang bukan pada keliling papan catur akan diwarnai sedemikian sehingga setiap persegi kecil memiliki tepat dua sisi yang diwarnai. Buktikan bahwa pewarnaan seperti itu mungkin jika dan hanya jika $m \cdot n$ genap.

C4. Misalkan m, M, K merupakan bilangan asli dengan $m \leq M$. Buktikan bahwa

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{m\binom{M}{m}\binom{K}{k}}{(m+k)\binom{M+K}{m+k}} = 1.$$

C5. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (m, r) dengan $2014 \geq m \geq r \geq 1$ yang memenuhi

$$\binom{2014}{m} + \binom{m}{r} = \binom{2014}{r} + \binom{2014-r}{m-r}.$$

C6. Tentukan semua bilangan asli n sehingga bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, n$ dapat ditempatkan pada keliling suatu lingkaran demikian sehingga untuk setiap bilangan asli s dengan $1 \leq s \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, terdapat suatu busur lingkaran yang hasil jumlah seluruh bilangan pada busur tersebut adalah s.

Geometri

G1. Lingkaran dalam dari segitiga ABC berpusat di I dan menyinggung BC di X. Misalkan garis AI dan BC berpotongan di L, dan D adalah hasil pencerminan dari L terhadap X. Titik E dan F berturut turut merupakan hasil pencerminan dari D terhadap garis CI dan garis BI. Tunjukkan bahwa $BCEF$ merupakan segiempat tali busur.

G2. Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam sudut A. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle C$. Jika $AD \cap MN = P$, buktikan bahwa $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$.

G3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AB \parallel CD$ dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F. Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL.

G4. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB < AC$. Titik P dan Q terletak pada garis bagi $\angle BAC$ sehingga BP dan CQ tegak lurus dengan garis bagi tersebut. Misalkan titik E, F berturut-turut pada sisi AB dan AC sedemikian sehingga $AEPF$ layang-layang. Buktikan bahwa garis BC, PF, dan QE berpotongan di satu titik.

G5. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan E, F, G, H berturut-turut titik tengah sisi AB, BC, CD, DA. Garis melalui G tegak lurus AB berpotongan dengan garis melalui H tegak lurus BC di titik K. Buktikan bahwa $\angle EKF = \angle ABC$.

G6. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Misalkan Γ adalah lingkaran yang menyinggung garis AO di titik A dan juga menyinggung garis BC. Buktikan bahwa Γ menyinggung lingkaran luar segitiga BOC.

Teori Bilangan

N1. (a) Misalkan k adalah bilangan asli sehingga persamaan

$$ab + (a+1)(b+1) = 2^k$$

tidak memiliki solusi bulat positif (a, b). Tunjukkan bahwa $k+1$ merupakan bilangan prima.

(b) Tunjukkan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $k+1$ merupakan bilangan prima dan persamaan

$$ab + (a+1)(b+1) = 2^k$$

memiliki solusi bulat positif (a, b).

N2. Misalkan a, b, c, k merupakan bilangan asli dengan $a, b, c \geq 3$ yang memenuhi persamaan

$$abc = k^2 + 1.$$

Tunjukkan bahwa paling sedikit satu diantara $a-1, b-1, c-1$ merupakan bilangan komposit.

N3. Carilah semua pasang bilangan asli (a, b) yang memenuhi

$$a^b = (a+b)^a.$$

N4. Misalkan m, n bilangan *asli* sehingga sistem persamaan

$$x + y^2 = m$$
$$x^2 + y = n$$

memiliki *tepat satu* solusi *bulat* (x, y). Tentukan semua nilai yang mungkin bagi $m - n$.

N5. Buktikan bahwa bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, 2013$ dapat diwarnai dengan tujuh warna berbeda (semua warna digunakan) sedemikian sehingga jika a, b, c berwarna sama, maka $2014 \nmid abc$ dan sisa pembagian abc oleh 2014 berwarna sama dengan a, b, c.

N6. Suatu bilangan asli disebut *cantik* jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

untuk suatu bilangan asli x dan y yang *berbeda*.

(a) Tunjukkan bahwa 2014 dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan cantik dan bilangan tidak cantik.

(b) Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan tidak cantik tetap tidak cantik .