**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten Tahun 2012**
**Set 1**

1. Banyaknya bilangan bulat $n$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} & (n-1)(n-3)(n-5)\cdots(n-2013) \\ = \; & n(n+2)(n+4)\cdots(n+2012) \end{aligned}$$

adalah ...

2. Banyaknya pasangan bilangan asli berbeda yang selisih kuadratnya 2012 adalah ...

3. Bilangan asli terbesar $x$ kurang dari 1000 sehingga terdapat tepat dua bilangan asli sehingga $\frac{n^2+x}{n+1}$ merupakan bilangan asli adalah ...

4. Diketahui suatu kelas terdiri dari 15 siswa. Semua siswa tersebut akan dikelompokkan menjadi 4 kelompok yang yang terdiri dari 4, 4, 4, dan 3 siswa. Ada berapa cara pengelompokan tersebut?

5. Diberikan segitiga siku-siku $ABC$, dengan $AB$ sebagai sisi miringnya. Jika keliling dan luasnya berturut-turut 624 dan 6864. Panjang sisi miring segitiga tersebut adalah ...

6. Banyaknya tripel bilangan bulat $(x, y, z)$ yang memenuhi

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$$

adalah ...

7. Diberikan suatu lingkaran dengan diameter $AB = 30$. Melalui $A$ dan $B$ berturut - turut ditarik tali busur $AD$ dan $BE$. Perpanjangan $AD$ dan $BE$ berpotongan di titik $C$. Jika $AC = 3AD$ dan $BC = 4BE$, maka luas segitiga $ABC$ adalah ...

8. Misalkan $a, b, c, d$, dan $e$ adalah-bilangan bilangan bulat sehingga $2^a 3^b 4^c 5^d 6^e$ juga merupakan bilangan bulat. Jika diketahui bahwa nilai mutlak dari $a, b, c, d$, dan $e$ tidak lebih dari 2012 maka nilai terkecil yang mungkin dari $a + b + c + d + e$ adalah ...

9. Jika $\left(\sqrt{2012} + \sqrt{2011}\right)^2 = n + r$ dengan $n$ merupakan bilangan asli dan $0 \le r < 1$, maka $r = ...$

10. Tentukan semua nilai $b$ sehingga untuk semua $x$ paling tidak salah satu dari $f(x) = x^2 + 2012x + b$ atau $g(x) = x^2 - 2012x + b$ positif.

11. Jumlah semua bilangan bulat $x$ sehingga ${}^2\log\left(x^2 - 4x - 1\right)$ merupakan bilangan bulat adalah ...

12. Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6?

13. Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?

14. Diberikan segitiga $ABC$ dengan keliling 3, dan jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan 5. Jika jari-jari lingkaran luarnya sama dengan 1, maka jumlah ketiga garis tinggi dari segitiga $ABC$ tersebut adalah ...

15. Jika hasilkali tiga bilangan ganjil berurutan sama dengan 7 kali jumlah ketiga bilangan itu, maka jumlah kuadrat ketiga bilangan itu adalah ...

16. Diketahui $\Delta ABC$ sama kaki dengan panjang $AB = AC = 3$, $BC = 2$, titik $D$ pada sisi $AC$ dengan panjang $AD = 1$. Tentukan luas $\Delta ABD$.

17. Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan probabilitas jumlah mata yang muncul 27.

18. Diberikan segitiga $ABC$ dengan sisi-sisi : $AB = x+1$, $BC = 4x-2$ dan $CA = 7-x$. Tentukan nilai dari $x$ sehingga segitiga $ABC$ merupakan segitiga sama kaki.

19. Misalkan terdapat 5 kartu dimana setiap kartu diberi nomor yang berbeda yaitu 2, 3, 4, 5 dan 6. Kartu-kartu tersebut kemudian dijajarkan dari kiri ke kanan secara acak sehingga berbentuk barisan. Berapa probabilitas bahwa banyaknya kartu yang dijajarkan dari kiri ke kanan dan ditempatkan pada tempat ke-$i$ akan lebih besar atau sama dengan $i$ untuk setiap $i$ dengan $1 \leq i \leq 5$?

20. $N$ lingkaran digambar pada sebuah bidang datar demikian sehingga terdapat enam titik dimana keenam titik tersebut terdapat pada paling sedikit tiga lingkaran. Berapa $N$ terkecil yang memenuhi kondisi tersebut?

**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten Tahun 2012**
**Set 2**

1. Diberikan segi-100 beraturan dengan panjang sisi 1 satuan. Jika $S$ menyatakan himpunan semua nilai yang mungkin dari panjang diagonal-diagonal segi-100 tersebut maka banyak anggota $S$ adalah ...

2. Pasangan bilangan asli $(a, b)$ yang memenuhi $4a(a+1) = b(b+3)$ sebanyak ...

3. Misalkan $S$ adalah himpunan semua faktor positif dari 1.000.000. Sebuah bilangan diambil secara acak dari $S$. Peluang bilangan yang terambil merupakan pangkat 3 dari suatu bilangan asli adalah ...

4. Banyaknya pasangan bilangan asli berbeda yang selisih kuadratnya 2012 adalah ...

5. Bilangan asli terbesar $x$ kurang dari 1000 sehingga terdapat tepat dua bilangan asli sehingga $\frac{n^2+x}{n+1}$ merupakan bilangan asli adalah ...

6. Diketahui bahwa besar tiap sudut dari segi-$n$ beraturan adalah $179,99^0$. Jika keliling dari segi-$n$ tersebut adalah 36 satuan maka panjang sisinya adalah ... satuan.

7. Diberikan segitiga siku-siku $ABC$, dengan $AB$ sebagai sisi miringnya. Jika keliling dan luasnya berturut-turut 624 dan 6864. Panjang sisi miring segitiga tersebut adalah ...

8. Diberikan suatu lingkaran dengan diameter $AB = 30$. Melalui $A$ dan $B$ berturut - turut ditarik tali busur $AD$ dan $BE$. Perpanjangan $AD$ dan $BE$ berpotongan di titik $C$. Jika $AC = 3AD$ dan $BC = 4BE$, maka luas segitiga $ABC$ adalah ...

9. Misalkan $a, b, c, d$, dan $e$ adalah-bilangan bilangan bulat sehingga $2^a 3^b 4^c 5^d 6^e$ juga merupakan bilangan bulat. Jika diketahui bahwa nilai mutlak dari $a, b, c, d$, dan $e$ tidak lebih dari 2012 maka nilai terkecil yang mungkin dari $a + b + c + d + e$ adalah ...

10. Tentukan semua nilai $b$ sehingga untuk semua $x$ paling tidak salah satu dari $f(x) = x^2 + 2012x + b$ atau $g(x) = x^2 - 2012x + b$ positif.

11. Misalkan
$$S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$$
dan $f : S \to S$ merupakan korespondensi satu-satu yang memenuhi $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$ dan $f(5) = 6$. Banyak fungsi $f$ yang memenuhi adalah ...

12. Diketahui $a^2 + b^2 = 5$, dan $c^2 + d^2 = 5$. Tentukan nilai maksimum dari $ac + bd$.

13. Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?

14. Diberikan segitiga $ABC$ dengan keliling 3, dan jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan 5. Jika jari-jari lingkaran luarnya sama dengan 1, maka jumlah ketiga garis tinggi dari segitiga $ABC$ tersebut adalah ...

15. Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan probabilitas jumlah mata yang muncul 27.

16. Diketahui $f$ adalah fungsi kuadrat dengan $f(1) = 8$ dan $f(8) = 1$. Nilai dari
$$f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + f(4) - f(5) + f(6) - f(7) + f(8) - f(9)$$
adalah ...

17. Jumlah dari 2012 bilangan genap berurutan mulai dari $n$ merupakan pangkat 2012 dari suatu bilangan asli. Nilai terkecil dari $n$ yang mungkin adalah ...

18. Diberikan segitiga siku-siku $ABC$ dengan $AB = 3, AC = 4$, dan $BC = 5$ serta $D$ merupakan titik tengah $BC$. Jika $r$ dan $s$ berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga $ABD$ dan $ADC$ maka nilai dari $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ adalah ...

19. Banyaknya angka 0 sebagai angka-angka terakhir dari 2012! adalah ...

20. Bilangan bulat positif terkecil $a$ sehingga $4a + 8a + 12a + \cdots + 2012a$ merupakan kuadrat sempurna adalah ...

**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten Tahun 2012**
**Set 3**

1. Banyaknya bilangan bulat $n$ sehingga
$$\frac{10n^2 - 55}{2n^2 + 3}$$
merupakan bilangan bulat adalah ...

2. Ada berapa cara menyusun semua huruf DUARIBUDUABELAS dengan syarat huruf I dan E berdekatan?

3. Dalam suatu pertemuan, setiap pria berjabat tangan dengan setiap orang, kecuali dengan istrinya; dan tidak ada ( tidak dilakukan ) jabat tangan diantara sesama wanita. Jika yang menghadiri pertemuan tersebut ada sebanyak 13 pasang suami-istri, ada berapa banyak jabat tangan yang dilakukan oleh 26 orang tersebut?

4. Banyaknya pasangan solusi bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$ adalah ...

5. Diketahui $a^2 + b^2 = 5$, dan $c^2 + d^2 = 5$. Tentukan nilai maksimum dari $ac + bd$.

6. Diberikan suatu persegi panjang $ABCD$ dan titik $H$ berada pada diagonal $AC$ sehingga DH tegak lurus $AC$. Jika panjang $AD = 15$ cm, $DC = 20$ cm, maka panjang $HB$ adalah ...

7. Diberikan suatu lingkaran dengan titik pusat $O$ dan diameter $AB$. Titik-titik $D$ dan $C$ adalah titik pada lingkaran sehingga $AD$ sejajar $OC$. Jika besar $\angle OAD = 42^0$ , maka besar $\angle OCD$ adalah ...

8. Banyaknya pasangan bilangan asli berbeda yang selisih kuadratnya 2012 adalah ...

9. Bilangan asli terbesar $x$ kurang dari 1000 sehingga terdapat tepat dua bilangan asli sehingga $\frac{n^2+x}{n+1}$ merupakan bilangan asli adalah ...

10. Diberikan segitiga siku-siku $ABC$, dengan $AB$ sebagai sisi miringnya. Jika keliling dan luasnya berturut-turut 624 dan 6864. Panjang sisi miring segitiga tersebut adalah ...

11. Diberikan suatu lingkaran dengan diameter $AB = 30$. Melalui $A$ dan $B$ berturut - turut ditarik tali busur $AD$ dan $BE$. Perpanjangan $AD$ dan $BE$ berpotongan di titik $C$. Jika $AC = 3AD$ dan BC $= 4BE$, maka luas segitiga $ABC$ adalah ...

12. Misalkan $a, b, c, d$, dan $e$ adalah-bilangan bilangan bulat sehingga $2^a 3^b 4^c 5^d 6^e$ juga merupakan bilangan bulat. Jika diketahui bahwa nilai mutlak dari $a, b, c, d$, dan $e$ tidak lebih dari 2012 maka nilai terkecil yang mungkin dari $a + b + c + d + e$ adalah ...

13. Tentukan semua nilai $b$ sehingga untuk semua $x$ paling tidak salah satu dari $f(x) = x^2 + 2012x + b$ atau $g(x) = x^2 - 2012x + b$ positif.

14. Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6?

15. Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?

16. Tentukan angka satuan pada $(2012)^{2012}$.

17. Di suatu papan tulis tertera bilangan dari 1 sampai dengan 100. Adi diminta untuk menghapus bilangan kelipatan dua, Upik diminta menghapus bilangan kelipatan tiga. $p$ adalah banyaknya bilangan yang masih tertera dipapan tulis. Jumlah digit dari $p$ adalah ...

18. Tentukan bilangan $n$ terbesar sehingga $6^n$ membagi 30!

19. Diberikan segitiga $ABC$ dengan keliling 3, dan jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan 5. Jika jari-jari lingkaran luarnya sama dengan 1, maka jumlah ketiga garis tinggi dari segitiga $ABC$ tersebut adalah ...

20. Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan probabilitas jumlah mata yang muncul 27.

**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Propinsi Tahun 2012**

## BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $O$ dan $I$ berturut-turut menyatakan titik pusat lingkaran luar dan titik pusat lingkaran dalam pada segitiga dengan panjang sisi $3, 4$, dan 5. Panjang dari $OI$ adalah...

2. Misalkan $x, y$, dan $z$ adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan
$$34x - 51y = 2012z.$$
Nilai dari $x + y + z$ adalah...

3. Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk segi delapan beraturan bermata 1, 2, 3, ..., 8. Empat dadu tersebut ditos (dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar ...

4. Fungsi bernilai real $f$ dan $g$ masing-masing memiliki persamaan
$$f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a} \quad \text{dan} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$$
dengan $a$ bilangan bulat positif. Diketahui $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $x$. Jika domain $g \circ f$ adalah $\{x | 3\frac{1}{2} \leq x < 4\}$, maka banyaknya $a$ yang memenuhi sebanyak...

5. Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika $S$ adalah himpunan semua bilangan asli $n$ yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat maka $S = ...$

6. Untuk sebarang bilangan real $x$ didefinisikan $\{x\}$ sebagai bilangan bulat yang terdekat dengan $x$, sebagai contoh $\{1,9\} = 2$, $\{-0,501\} = -1$, dan sebagainya. Jika $n$ adalah suatu bilangan bulat positif kelipatan 2012, maka banyak bilangan bulat positif $k$ yang memenuhi $\left\{\sqrt[3]{k}\right\} = n$ adalah...

7. Banyak bilangan bilangan asli $n < 100$ yang mempunya kelipatan yang berbentuk
$$123456789123456789...123456789$$
adalah...

8. Diberikan parallelogram (jajar genjang) $ABCD$. Titik $M$ pada $AB$ sedemikian rupa sehingga $\frac{AM}{AB} = 0,017$, dan titik $N$ pada $AD$ sehingga $\frac{AN}{AD} = \frac{17}{2009}$. Misal- kan $AC \cap MN = P$, maka $\frac{AC}{AP} = ...$

9. Dalam sebuah pertemuan, 5 pasang suami istri akan didudukkan pada sebuah meja bundar. Berapa banyak cara untuk mengatur posisi duduk 5 pasang suami istri tersebut sedemikian sehingga tepat 3 suami duduk disamping istrinya?

10. Jika $p, q$, dan $r$ akar-akar dari $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, maka $p^3 + q^3 + r^3 =$ ....

11. Jika $m$ dan $n$ bilangan bulat positif yang memenuhi $m^2 + n^5 = 252$, maka $m + n =$...

12. Pada $\Delta ABC$ titik $D$ terletak pada garis $BC$. Panjang $BC = 3$, $\angle ABC = 30°$, dan $\angle ADC = 45°$. Panjang $AC =$...

13. Lima siswa, $A, B, C, D, E$ berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika $A$ tidak bisa berlari pertama dan $D$ tidak bisa berlari terakhir, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah...

14. Diketahui $H$ adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2012 yang faktor primanya tidak lebih dari 3. Selanjutnya didefinisikan himpunan

$$S = \left\{ \frac{1}{n} | n \in H \right\}.$$

Jika $x$ merupakan hasil penjumlahan dari semua anggota $S$ dan $\lfloor x \rfloor$ menya- takan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $x$, maka $\lfloor x \rfloor = ...$

15. Diberikan dua lingkaran $\Gamma_1$ dan $\Gamma_2$ yang berpotongan di dua titik yaitu $A$ dan $B$ dengan $AB = 10$. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat kedua lingkaran memotong lingkaran $\Gamma_1$ dan $\Gamma_2$ masing-masing di $P$ dan $Q$. Jika $PQ = 3$ dan jari-jari lingkaran $\Gamma_1$ adalah 13, maka jari-jari lingkaran $\Gamma_2$ adalah ...

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat $(x, y)$ yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$$

adalah ......

17. Untuk bilangan real positif $x$ dan $y$ dengan $xy = \frac{1}{3}$, nilai minimum $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah ......

18. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif $(a, b)$ yang memenuhi

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$$

adalah ......

19. Diberikan segitiga $ABC$, dengan panjang $AB$ sama dengan dua kali panjang $AC$. Misalkan $D$ dan $E$ berturut-turut pada segmen $AB$ dan $BC$, sehingga $\angle BAE = \angle ACD$. Jika $F = AE \cap CD$ dan $CEF$ merupakan segitiga sama sisi, maka besar sudut dari segitiga $ABC$ adalah ......

20. Banyaknya bilangan bulat positif $n$ yang memenuhi $n \leq 2012$ dan merupakan bilangan kuadrat sempurna atau kubik atau pangkat 4 atau pangkat 5 atau ... atau pangkat 10, ada sebanyak...

**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Propinsi Tahun 2012**

**BAGIAN KEDUA**

**Soal 1.** Tentukan semua pasangan bilangan bulat tak negatif $(a, b, x, y)$ yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a + b = xy \\ x + y = ab \end{cases}$$

**Soal 2.** Cari semua pasangan bilangan real $(x, y, z)$ yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{y - z^2} \\ y = 1 + \sqrt{z - x^2} \\ z = 1 + \sqrt{x - y^2}. \end{cases}$$

**Soal 3.** Seorang laki - laki memiliki 6 teman. Pada suatu malam di suatu restoran, dia bertemu dengan masing - masing mereka 11 kali, setiap 2 dari mereka 6 kali, setiap 3 dari mereka 4 kali, setiap 4 dari mereka 3 kali, setiap 5 dari mereka 3 kali, dan semua mereka 10 kali. Dia makan diluar 9 kali tanpa bertemu mereka. Berapa kali dia makan di restoran tersebut secara keseluruhan ?

**Soal 4.** Diberikan segitiga lancip $ABC$. Titik $H$ menyatakan titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari $A$. Buktikan bahwa

$$AB + AC \geq BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC$$

**Soal 5.** Diketahui $p_0 = 1$ dan $p_i$ bilangan prima ke-$i$, untuk $i = 1, 2, \ldots$; yaitu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, .... Bilangan prima $p_i$ dikatakan *sederhana* jika

$$p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$$

untuk semua bilangan bulat positif $n$. Tentukan semua bilangan prima yang sederhana.

**Olimpiade Sains Nasional**
**Bidang Matematika SMA/MA**
**Tahun 2012**

## HARI PERTAMA

**Soal 1**. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli $a$ dan $b$, bilangan

$$n = FPB\,(a, b) + KPK\,(a, b) - a - b$$

adalah bilangan bulat genap tak negatif.

**Soal 2**. Diberikan bilangan asli $n$ dan bilangan-bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Buktikan bahwa

$$(1 + a_1)^2\,(1 + a_2)^3 \cdots (1 + a_n)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+1}\,a_1 a_2 \cdots a_n$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

**Soal 3**. Diberikan segitiga lancip $ABC$ dengan $AB > AC$ dan memiliki titik pusat lingkaran luar $O$. Garis $BO$ dan $CO$ memotong garis bagi $\angle BAC$ berturut-turut di titik $P$ dan $Q$. Selanjutnya, garis $BQ$ dan $CP$ berpotongan di titik $R$. Buktikan bahwa garis $AR$ tegak lurus terhadap garis $BC$.

**Soal 4**. Diberikan 2012 titik berbeda $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2012}$ di bidang Cartesius. Untuk sebarang permutasi $B_1$, $B_2$, ..., $B_{2012}$ dari $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2012}$, didefinisikan bayangan dari titik $P$ terhadap permutasi tersebut sebagai berikut.

Titik $P$ dirotasikan $180°$ dengan pusat $B_1$ menghasilkan titik $P_1$,
titik $P_1$ dirotasikan $180°$ dengan pusat $B_2$ menghasilkan titik $P_2$,
$\ldots$,
titik $P_{2011}$ dirotasikan $180°$ dengan pusat $B_{2012}$ menghasilkan titik $P_{2012}$.

Selanjutnya, titik $P_{2012}$ dikatakan sebagai bayangan dari titik $P$ terhadap permutasi $B_1$, $B_2$, ..., $B_{2012}$. Misalkan $N$ adalah banyak bayangan titik $P$ yang berbeda terhadap semua permutasi dari $A_1$, $A_2$, ..., $A_{2012}$. Tentukanlah nilai terbesar yang mungkin bagi $N$.

**Olimpiade Sains Nasional 2012**
**Bidang Matematika SMA/MA**

**HARI KEDUA**

**Soal 5**. Diberikan bilangan asli $m$ dan $n$. Misalkan $P$ dan $Q$ adalah dua kumpulan $m \times n$ bilangan 0 dan 1 yang disusun dalam $m$ baris dan $n$ kolom. Contoh salah satu kumpulan itu untuk $m = 3$ dan $n = 4$ adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Misalkan kedua kumpulan tersebut memenuhi empat sifat berikut.

(i) Pada setiap baris di $P$, bilangan dari kiri ke kanan tidak pernah naik (boleh sama atau turun),

(ii) pada setiap kolom di $P$, bilangan dari atas ke bawah tidak pernah naik (boleh sama atau turun),

(iii) jumlah bilangan pada sebarang baris di $P$ sama dengan jumlah bilangan pada baris yang sama di $Q$, dan

(iv) jumlah bilangan pada sebarang kolom di $P$ sama dengan jumlah bilangan pada kolom yang sama di $Q$.

Tunjukkanlah bahwa bilangan pada baris ke-$i$ kolom ke-$j$ di $P$ sama dengan bilangan pada baris ke-$i$ kolom ke-$j$ di $Q$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

**Soal 6**. Misalkan $\mathbb{R}^+$ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Tunjukkan bahwa tidak ada fungsi $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ yang memenuhi

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + \frac{1}{2012}$$

untuk setiap bilangan real positif $x$ dan $y$.

**Soal 7**. Misalkan $n$ bilangan asli. Buktikan bahwa persamaan

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$$

memiliki solusi pasangan bilangan asli $(x, y)$ jika dan hanya jika $n$ habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat yang lebih besar daripada 1.

**Soal 8**. Diberikan sebarang segitiga $ABC$ dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi $BC$ dan lingkaran luar segitiga $ABC$ berturut-turut di $D$ dan $E$. Misalkan $M$ dan $N$ berturut-turut titik tengah $BD$ dan $CE$. Lingkaran luar segitiga $ABD$ memotong $AN$ di titik $Q$. Lingkaran yang melalui $A$ dan menyinggung $BC$ di $D$ memotong garis $AM$ dan sisi $AC$ berturut-turut di titik $P$ dan $R$. Tunjukkan bahwa empat titik $B, P, Q, R$ terletak pada satu garis.

## Asian Pacific Mathematics Olympiad 2012

*Waktu: 4 Jam*
*Setiap soal bernilai 7 poin*

**Soal 1.** Misalkan $P$ suatu titik di dalam segitiga $ABC$, dan misalkan $D, E, F$ berturut-turut adalah titik-titik perpotongan dari garis $AP$ dengan sisi $BC$, garis $BP$ dengan sisi $CA$ dan garis $CP$ dengan sisi $AB$. Buktikan bahwa luas segitiga $ABC$ adalah 6, jika luas ketiga segitiga $PFA, PDB$ dan $PEC$ adalah 1.

**Soal 2.** Ke dalam setiap kotak dari sebuah grid berukuran $2012 \times 2012$, dimasukkan sebuah bilangan real yang lebih dari atau sama dengan 0 dan kurang dari atau sama dengan 1. Tinjau pembagian grid tersebut menjadi dua persegi panjang tak kosong yang terdiri dari kotak-kotak grid dengan cara menggambar sebuah garis horisontal maupun vertikal yang sejajar dengan sisi-sisi grid. Misalkan diketahui bahwa bagaimanapun grid tersebut dibagi menjadi dua persegi panjang dengan cara di atas, paling sedikit pada salah satu persegi panjang, jumlah bilangan-bilangan di kotak dalam persegi panjang tersebut kurang dari atau sama dengan 1. Tentukan nilai terbesar yang mungkin bagi jumlah semua $2012^2$ bilangan yang dimasukkan ke dalam kotak.

**Soal 3.** Tentukan semua pasangan $(p, n)$ dengan $p$ bilangan prima dan $n$ bilangan asli sedemikian sehingga $\frac{n^p+1}{p^n+1}$ adalah suatu bilangan bulat.

**Soal 4.** Misalkan $ABC$ suatu segitiga lancip. Misalkan $D$ adalah kaki dari garis tegak lurus yang ditarik dari $A$ ke sisi $BC$, $M$ adalah titik tengah $BC$ dan $H$ adalah titik tinggi segitiga $ABC$. Misalkan $E$ adalah titik potong lingkaran luar $\Gamma$ dari segitiga $ABC$ dengan setengah garis $MH$, dan $F$ adalah titik potong (selain $E$) dari garis $ED$ dengan lingkaran $\Gamma$. Buktikan bahwa $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

**Soal 5.** Misalkan $n$ suatu bilangan bulat yang lebih dari atau sama dengan 2. Buktikan bahwa jika bilangan-bilangan real $a_1, a_2, \ldots, a_n$ memenuhi $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, maka

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{n - a_i a_j} \le \frac{n}{2}.$$

## $53^{\text{rd}}$ International Mathematical Olympiad 2012
## Mar Del Plata, Argentina

### HARI PERTAMA

**Soal 1.** Diberikan segitiga $ABC$, titik $J$ adalah pusat *excircle* berseberangan dengan titik sudut A. *Excircle* ini menyinggung sisi $BC$ di $M$, dan menyinggung garis $AB$ dan $AC$ berturut-turut di $K$ dan $L$. Garis $LM$ dan $BJ$ bertemu di $F$, dan garis $KM$ dan $CJ$ bertemu di $G$. Misalkan $S$ adalah titik perpotongan garis $AF$ dan $BC$, dan misalkan $T$ adalah titik perpotongan garis $AG$ dan $BC$.

Buktikan bahwa $M$ adalah titik tengah $ST$.

(*Excircle* $ABC$ berseberangan dengan titik sudut $A$ adalah lingkaran yang menyinggung ruas garis $BC$, menyinggung sinar $AB$ di setelah $B$, menyinggung sinar $AC$ di setelah $C$.)

**Soal 2.** Misalkan $n \geq 3$ suatu bilangan bulat, dan misalkan $a_2, a_3, \ldots, a_n$ adalah bilangan real positif sehingga $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Buktikan bahwa

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

**Soal 3.** Permainan *tebakan pembohong* adalah permainan yang dimainkan oleh dua pemain $A$ dan $B$. Aturan permainan tergantung pada dua bilangan bulat positif $k$ dan $n$ yang diketahui kedua pemain.

Pada awal permainan, $A$ memilih bilangan bulat $x$ dan $N$ dengan $1 \leq x \leq N$. Pemain $A$ menjaga kerahasiaan $x$, dan dengan jujur mengatakan $N$ ke pemain $B$. Pemain $B$ sekarang mencoba untuk mendapatkan informasi tentang $x$ dengan menanyakan kepada pemain $A$ pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut: masing-masing pertanyaan berisikan $B$ mengspesifikasikan sebarang himpunan $S$ dari bilangan bulat positif (dimungkinkan himpunan itu telah dispesifikasikan di beberapa pertanyaan sebelumnya), dan menanyakan kepada $A$ apakah $x$ di dalam $S$. Pemain $B$ boleh bertanya sebanyak mungkin pertanyaan sesuai keinginannya. Setelah masing-masing pertanyaan, pemain $A$ harus segera menjawab pertanyaan itu dengan *ya* atau *tidak*, tetapi diperbolehkan untuk berbohong sebanyak yang dia inginkan; satu-satunya batasan adalah bahwa, diantara sebarang $k+1$ jawaban berturutan, setidaknya satu jawaban harus benar.

Setelah $B$ mengajukan sebanyak mungkin pertanyaan-pertanyaan yang dia inginkan, dia harus mengspesifikasikan himpunan $X$ beranggotakan paling banyak $n$ bilangan bulat positif. Jika $x$ di dalam $X$ maka $B$ menang; jika tidak, ia kalah. Buktikan bahwa:

1. Jika $n \geq 2^k$, maka $B$ dapat menjamin suatu kemenangan.
2. Untuk semua $k$ cukup besar, terdapat suatu bilangan bulat $n \geq (1,99)^k$ sehingga $B$ tidak dapat menjamin suatu kemenangan.

## $53^{\text{rd}}$ International Mathematical Olympiad 2012
## Mar Del Plata, Argentina

**HARI KEDUA**

**Soal 4**. Cari semua fungsi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sehingga, untuk semua bilangan bulat $a, b, c$ yang memenuhi $a + b + c = 0$, persamaan berikut ini berlaku:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

**Soal 5**. Misalkan $ABC$ suatu segitiga dengan $\angle BCA = 90°$, dan misalkan $D$ adalah kaki garis tinggi dari $C$. Misalkan $X$ adalah titik di bagian dalam ruas garis $CD$. Misalkan $K$ adalah titik pada ruas garis $AX$ sehingga $BK = BC$. Serupa, misalkan $L$ adalah titik pada ruas garis $BX$ sehingga $AL = AC$. Misalkan $M$ adalah titik perpotongan $AL$ dan $BK$.

Buktikan bahwa $MK = ML$.

**Soal 6**. Cari semua bilangan bulat positif $n$ yang mana terdapat bilangan bulat non-negatif $a_1, a_2, ..., a_n$ sehingga

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Kota/Kabupaten Tahun 2012**

## JAWABAN SET 1

1. 0
2. 1
3. 960
4. Ada $\frac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}\binom{3}{3}}{3!}$ cara
5. 290
6. Tak hingga
7. 540
8. $-2012$
9. $1-\left(\sqrt{2012}-\sqrt{2011}\right)^2$
10. $b>0$
11. 4
12. 420 faktor.
13. $\binom{10}{2}\binom{15}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{15}+\binom{10}{1}\binom{15}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}\left(\frac{1}{4}\right)$
$+\binom{10}{0}\binom{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}\left(\frac{1}{4}\right)^2$
14. 1
15. 83
16. $\frac{\sqrt{10}}{3}$
17. $\frac{5+20+10}{6^5}$
18. 9/5
19. 2/15
20. 5

## JAWABAN SET 2

1. 49.
2. 0
3. $\frac{9}{49}$.
4. 1
5. 960
6. $0,001$ atau $\frac{1}{1000}$
7. 290
8. 540
9. $-2012$
10. $b > 0$
11. 120
12. 5
13. $\binom{10}{2}\binom{15}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{15}+\binom{10}{1}\binom{15}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}\left(\frac{1}{4}\right)$
$$+\binom{10}{0}\binom{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$$
14. 1
15. $\frac{5+20+10}{6^5}$
16. 5
17. 2516
18. $\frac{49}{30}$
19. 501
20. 3521

**JAWABAN SET 3**

1. 4
2. $2 \times \frac{14!}{2!3!3!2!}$
3. 234

4. 4
5. 5
6. $\sqrt{193}$ cm
7. $69^0$
8. 1
9. 960
10. 290
11. 540
12. $-2012$
13. $b > 0$
14. 420
15. $\binom{10}{2}\binom{15}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{15} + \binom{10}{1}\binom{15}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{14}\left(\frac{1}{4}\right)$
$$+\binom{10}{0}\binom{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$$
16. 6
17. 6
18. 13
19. 1
20. $\frac{5+20+10}{6^5}$

**Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMA/MA**
**Seleksi Tingkat Propinsi Tahun 2012**

## SOLUSI BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan $O$ dan $I$ berturut-turut menyatakan titik pusat lingkaran luar dan titik pusat lingkaran dalam pada segitiga dengan panjang sisi $3, 4$, dan $5$. Panjang dari $OI$ adalah...

   **Solusi:** $\frac{5}{4}$

   Titik $O$ terletak di tengah-tengah sisi miring, sedangkan titik $I$ terletak pada garis bagi segitiga. Dengan menggunakan power poin pada lingkaran luar kita akan punya

$$\begin{aligned} OI^2 &= R(R-2r) = \frac{3.4.5}{4.\frac{1}{2}.3.4}\left(\frac{3.4.5}{4.\frac{1}{2}.3.4} - 2\frac{\frac{1}{2}.3.4}{\frac{1}{2}(3+4+5)}\right) \\ &= \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right) = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

2. Misalkan $x, y$, dan $z$ adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan

$$34x - 51y = 2012z.$$

   Nilai dari $x+y+z$ adalah...

   **Solusi:** 1028

   Perhatikan bahwa

$$2012z = 34x - 51y = 17(2x-3y).$$

   Jelas bahwa $17|z$, sehingga karena $z$ prima maka $z = 17$, sehingga persamaan menjadi

$$2x - 3y = 2012 \Longleftrightarrow -3y = 2(1006 - x)$$

   artinya $2|y$ maka $y = 2$ yang selanjutnya kita peroleh $x = 1006 + 3 = 1009$. Dengan demikian,

$$x + y + z = 1009 + 2 + 17 = 1028.$$

3. Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk segi delapan beraturan bermata 1, 2, 3, ..., 8. Empat dadu tersebut ditos (dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar ...

   **Solusi:** $\frac{8^4 - 8\times 7\times 6\times 5}{8^4}$

4. Fungsi bernilai real $f$ dan $g$ masing-masing memiliki persamaan

$$f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a} \quad \text{dan} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$$

   dengan $a$ bilangan bulat positif. Diketahui $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $x$. Jika domain $g \circ f$ adalah $\{x|3\frac{1}{2} \leq x < 4\}$, maka banyaknya $a$ yang memenuhi sebanyak...

   **Solusi:** 3, yaitu $a = 3$ atau $a = 2$ atau $a = 1$

   $D_{g\circ f} \subseteq D_f$ dan

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\sqrt{\lfloor x \rfloor - a}}$$

   Jadi $\lfloor x \rfloor - a \geq 0$, dan

$$\sqrt{\lfloor x \rfloor - a}(\sqrt{\lfloor x \rfloor - a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}) \Longrightarrow \lfloor x \rfloor - a - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\sqrt{\lfloor x \rfloor - a} \geq 0$$

   Maka $\sqrt{\lfloor x \rfloor - a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \geq 0$, sehingga $\lfloor x \rfloor - a - \frac{2}{a} \geq 0$. Jadi

$$\lfloor x \rfloor \geq \frac{a^2 + 2}{a}$$

   $D_{g\circ f} = \{x|3\frac{1}{2} \leq x < 4\}$
   Nilai $x$ bisa $\frac{7}{2}$, yang mungkin $\lfloor x \rfloor = 3$, jadi $3 \geq \frac{a^2+2}{a}$, sehingga $a = 2$ atau $a = 1$.

   **atau**: $\sqrt{\lfloor x \rfloor - a} = 0$, yaitu $a = 3$

5. Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika $S$ adalah himpunan semua bilangan asli $n$ yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu

bilangan bulat maka $S = ...$

**Solusi:** $S = \left\{ \frac{(p-1)^2}{4} \right\}$

Misalkan $d = \gcd(n, n+p)$, maka $d|n$ dan $d|n+p$ akibatnya $d|p$ artinya $d = 1$ atau $d = p$.

(i). Jika $d = 1$ maka agar $n^2 + pn = n(p+n)$ haruslah $n$ dan $p+n$ keduanya merupakan kuadrat sempurna (karena $n$ dan $n+p$ saling prima), sehingga dapat kita tulis menjadi $n = x^2$ dan $n + p = y^2$ untuk suatu bilangan asli $x$ dan $y$, tentu saja dengan $x < y$. Kita kurangkan keduanya, kita peroleh

$$y^2 - x^2 = p \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = p.$$

Karena $y - x < y + x$ dan $p$ prima maka $y - x = 1$ dan $y + x = p$. Dari sini diperoleh $y = \frac{p+1}{2}$ dan $x = \frac{p-1}{2}$, sehingga $n = x^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

(ii). Jika $d = p$ maka $p|n$, sehingga $n = pm$ untuk suatu bilangan asli $m$. Dengan demikian agar $n^2 + pn = p^2(m^2 + m)$ merupakan kuadrat sempurna, haruslah $m^2 + m$ juga kuadrat sempurna. Perhatikan bahwa $m^2 + m$ kuadrat sempurna jika dan hanya jika $4m^2 + 4m$ juga kuadrat sempurna. Akan tetapi

$$(2m)^2 < 4m^2 + 4m < (2m+1)^2$$

yang tentu saja tidak mungkin ada bilangan kuadrat di antara dua bilangan kuadrat berurutan. Dengan demikian, untuk kasus $d = p$, tidak ada $n$ yang memenuhi.

6. Untuk sebarang bilangan real $x$ didefinisikan $\{x\}$ sebagai bilangan bulat yang terdekat dengan $x$, sebagai contoh $\{1,9\} = 2$, $\{-0,501\} = -1$, dan sebagainya. Jika $n$ adalah suatu bilangan bulat positif kelipatan 2012, maka banyak bilangan bulat positif $k$ yang memenuhi $\left\{\sqrt[3]{k}\right\} = n$ adalah...

   **Solusi:** $3n^2 + 1$

   Agar $\left\{\sqrt[3]{k}\right\} = n$ maka $n - \frac{1}{2} < \sqrt[3]{k} < n + \frac{1}{2}$ ekivalen dengan $n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8} < k < n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$. Karena $n$ kelipatan 2012, tentu $n$ kelipatan 4, sehingga $\frac{3}{2}n^2$ dan $\frac{3}{4}n$ merupakan bilangan bulat.

Dengan demikian $n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n \leq k \leq n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n$, sehingga $k$ yang memenuhi ada sebanyak

$$n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n\right) + 1 = 3n^2 + 1.$$

7. Banyak bilangan bilangan asli $n < 100$ yang mempunya kelipatan yang berbentuk

$$123456789123456789...123456789$$

adalah...

**Solusi:** 40

Karena 123456789123456789...123456789 bukan kelipatan 2 ataupun 5 maka $n$ yang memenuhi sifat di atas haruslah bukan kelipatan 2 atau 5. Sekarang misalkan $n$ bukan kelipatan 2 atau 5. Tulis $k = 123456789$. Perhatikan bilangan-bilangan

$$k, kk, kkk, ..., \underbrace{kkk...k}_{n \text{ kali}}.$$

Jika salah satu ada yang kelipatan $n$ maka selesai, jika tidak maka menurut $PHP$ akan ada 2 bilangan yang sisanya sama jika dibagi $n$, dan jika dikurangkan kita peroleh bilangan berbentuk $kkk..k00..00$. Dan karena $n$ bukan kelipatan 2 atau 5 maka tentu $kkk...kk$ ini merupakan kelipatan $n$. Jadi $n$ yang memenuhi adalah semua bilangan asli $n$ yang bukan kelipatan 2 atau 5. Dengan demikian, cukup dihitung banyak bilangan asli $n$ kelipatan 2 atau 5 yang kurang dari 100, yaitu ada sebanyak

$$\left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{99}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{10} \right\rfloor = 49 + 19 - 9 = 59.$$

Jadi banyak $n$ yang dimaksud adalah $99 - 59 = 40$.

8. Diberikan parallelogram (jajar genjang) $ABCD$. Titik $M$ pada $AB$ sedemikian rupa sehingga $\frac{AM}{AB} = 0,017$, dan titik $N$ pada $AD$ sehingga $\frac{AN}{AD} = \frac{17}{2009}$. Misal- kan $AC \cap MN = P$, maka $\frac{AC}{AP} = ...$

**Solusi:** 177

Buat garis melalui $N$ sejajar $AB$, sebut titik potongnya dengan $AC$

adalah $S$. Dengan demikian, segitiga $ASN$ sebangun dengan segitiga $ACD$, akibatnya :

$$\frac{AS}{AC}+\frac{AP+PS}{AC}=\frac{AN}{AD}=\frac{17}{2009}$$

Karena segitiga $PSN$ sebangun dengan segitiga $PAM$, akibatnya :

$$\frac{PS}{AP}=\frac{SN}{AM}=\frac{\frac{17}{2009}DC}{\frac{17}{1000}AB}=\frac{1000}{2009}$$

$$\frac{PS}{AP}+1=\frac{3009}{2009}\longrightarrow\frac{AP+PS}{AP}=\frac{3009}{2009}\quad\text{atau}\quad\frac{AS}{AP}=\frac{3009}{2009}$$

Mengingat $\frac{AS}{AC}=\frac{AN}{AD}=\frac{17}{2009}$ atau $AS=\frac{17}{2009}AC$, dengan demikian diperoleh :

$$\frac{AS}{AP}=\frac{3009}{2009}=\frac{\frac{17}{2009}AC}{AP}\longrightarrow\frac{AC}{AP}=\frac{3009}{17}=177$$

9. Dalam sebuah pertemuan, 5 pasang suami istri akan didudukkan pada sebuah meja bundar. Berapa banyak cara untuk mengatur posisi duduk 5 pasang suami istri tersebut sedemikian sehingga tepat 3 suami duduk disamping istrinya?

   **Solusi: 20**

10. Jika $p, q$, dan $r$ akar-akar dari $x^3-x^2+x-2=0$, maka $p^3+q^3+r^3=$ ....

    **Solusi:** 4

    Karena $p, q$, dan $r$ akar-akar, maka polinom yang diketahui dapat difaktorkan menjadi :

    $$x^3-x^2+x-2=(x-p)(x-q)(x-r)=x^3-(p+q+r)x^2+(pq+pr+qr)x-pqr$$

    Dengan demikian diperoleh : $p+q+r=1$; $pq+pr+qr=1$; $pqr=2$
    Karena $p, q, r$ akar-akar, maka memenuhi persamaan :
    $p^3-p^2+p-2=0$, $q^3-q^2+q-2=0$, $r^3-r^2+r-2=0$.
    Ketiga persamaan ini dijumlahkan, diperoleh :

    $$p^3+q^3+r^3-(p^2+q^2+r^2)+(p+q+r)-6=0$$

    $$(p+q+r)^2=p^2+q^2+r^2+2(pq+pr+qr)=1$$

    $$p^2+q^2+r^2=-1$$

    Jadi, $p^3+q^3+r^3=6-1-1=4$

11. Jika $m$ dan $n$ bilangan bulat positif yang memenuhi $m^2 + n^5 = 252$, maka $m + n =$...

    **Solusi:** $m = n = 3$. Jadi $m + n = 6$

    $m^2 = 252 - n^5$ non negatif, jadi $n^5 \leq 252$, sehingga $n < 4$. Kemungkinan $n = 1, 2, 3$ berakibat $m = 3 = n$.

12. Pada $\Delta ABC$ titik $D$ terletak pada garis $BC$. Panjang $BC = 3$, $\angle ABC = 30°$, dan $\angle ADC = 45°$. Panjang $AC =$...

    **Solusi:** $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$

13. Lima siswa, $A, B, C, D, E$ berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika $A$ tidak bisa berlari pertama dan $D$ tidak bisa berlari terakhir, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah...

    **Solusi:** 78

    Jika tidak ada syarat, total susunan adalah $5! = 120$
    Banyaknya susunan dengan $A$ berlari pertama adalah $4! = 24$
    Banyaknya susunan dengan $D$ berlari terakhir adalah $4! = 24$
    Banyaknya susunan dengan $A$ berlari pertama dan $D$ terakhir adalah $3! = 6$
    Jadi susunan yang memenuhi syarat soal adalah $120 - 24 - 24 + 6 = 78$.

14. Diketahui $H$ adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2012 yang faktor primanya tidak lebih dari 3. Selanjutnya didefinisikan himpunan
$$S = \left\{ \frac{1}{n} | n \in H \right\}.$$
    Jika $x$ merupakan hasil penjumlahan dari semua anggota $S$ dan $\lfloor x \rfloor$ menya- takan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $x$, maka $\lfloor x \rfloor = ...$

    **Solusi:** 2

    Perhatikan bahwa $n = 2^a 3^b$, sehingga
$$x = \sum_{s \in S} s = \sum_{n \in H} \frac{1}{n} < \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \right) = 2.\frac{3}{2} = 3.$$

Selain itu, kita juga punya bahwa

$$x > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} > 2.$$

Karena $2 < x < 3$ maka $\lfloor x \rfloor = 2$.

15. Diberikan dua lingkaran $\Gamma_1$ dan $\Gamma_2$ yang berpotongan di dua titik yaitu $A$ dan $B$ dengan $AB = 10$. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat kedua lingkaran memotong lingkaran $\Gamma_1$ dan $\Gamma_2$ masing-masing di $P$ dan $Q$. Jika $PQ = 3$ dan jari-jari lingkaran $\Gamma_1$ adalah 13, maka jari-jari lingkaran $\Gamma_2$ adalah ...

    **Solusi:** $\frac{29}{4}$

    Katakan titik pusat lingkaran $\Gamma_1, \Gamma_2$ masing-masing adalah $O_1$ dan $O_2$.
    Karena $O_1A = O_1B$ dan $O_2A = O_2B$, maka $O_1\bar{O}_2 \perp A\bar{B}$. Katakan perpotongannya di titik $T$. Dengan menggunakan teorema Phytagoras pada $\Delta ATO_1$ diperoleh $O_1T = 12$. Karena $O_1P = 13$ dan $O_1T = 12$, maka $PT = 1$. Karena $PQ = 3$, maka $QT = QP - PT = 2$.
    Misalkan $O_2A = O_2Q = r$, maka $O_2T = O_2Q - QT = r - 2$. Dengan menggunakan teorema Phytagoras pada $\Delta ATO_2$ diperoleh

    $$\begin{aligned} AT^2 + O_2T^2 &= AO_2^2 \\ \Leftrightarrow 5^2 + (r-2)^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{29}{4} \end{aligned}$$

    Jadi jari-jari lingkaran $\Gamma_2$ adalah $\frac{29}{4}$.

16. Banyaknya pasangan bilangan bulat $(x, y)$ yang memenuhi

    $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$$

    adalah ......

    **Solusi:** 1, yaitu (2,3)

17. Untuk bilangan real positif $x$ dan $y$ dengan $xy = \frac{1}{3}$, nilai minimum $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah ......

    **Solusi:** 9

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{9x^6}+\frac{1}{4y^6}=\left(\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2y^3}\right)^2+\frac{1}{3x^3y^3}\geq 9,$$

dengan terjadi kesamaan jika dan hanya jika $3x^3=2y^3$.

18. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif $(a,b)$ yang memenuhi

$$4^a+4a^2+4=b^2$$

adalah ......

**Solusi:** 2

Dari persamaan berakibat $b^2$ genap dan $b^2>4^a$. Sehingga $b$ genap dan $b>2^a$. Diperoleh $b\geq 2^a+2$ dan

$$4^a+4a^2+4=b^2\geq (2^a+2)^2=4^a+4.2^a+4,$$

yang memberikan $a^2\geq 2^a$. Akibatnya $a\leq 4$. Cukup diuji $a=1,2,3,4$ pada persamaan aslinya dan diperoleh solusi $(a,b)=(2,6)$ dan $(a,b)=(4,18)$.

19. Diberikan segitiga $ABC$, dengan panjang $AB$ sama dengan dua kali panjang $AC$. Misalkan $D$ dan $E$ berturut-turut pada segmen $AB$ dan $BC$, sehingga $\angle BAE=\angle ACD$. Jika $F=AE\cap CD$ dan $CEF$ merupakan segitiga sama sisi, maka besar sudut dari segitiga $ABC$ adalah ......

**Solusi:** $\angle C=90^o$, $\angle A=60^o$, dan $\angle B=30^o$

Karena segitiga $CEF$ sama sisi, maka $\angle EFC=60^o$ , akibatnya $\angle CFA=120^o$. Jadi $\angle FAC=180^o-\angle CFA-\angle ACF=60^o-\angle CF$ dan

$$\angle BAC=\angle BAE+\angle FAC=\angle BAE+60^o-\angle ACF$$

Jadi, $\angle BAC=60^o$. Selanjutnya, dihitung : $BC^2=x^2+4x^2-2x(2x)\cos 60^o$ , dimana $x=AC$, diperoleh $BC=x\sqrt{3}$
Segitiga $ABC$, sisi-sisinya : $AB=2x$, $AC=x$, $BC=x\sqrt{3}$.
Ternyata : $AB^2=AC^2+BC^2$, berarti siku-siku di $C$.
Jadi, $\angle C=90^o,\angle A=60^o$, dan $\angle B=30^o$

20. Banyaknya bilangan bulat positif $n$ yang memenuhi $n\leq 2012$ dan merupakan bilangan kuadrat sempurna atau kubik atau pangkat 4

atau pangkat 5 atau ... atau pangkat 10, ada sebanyak...

**Solusi:**

**SOLUSI BAGIAN KEDUA**

**Soal 1.** Karena $x$ dan $y$ simetris dapat diasumsikan $x \leq y$.

Jika $x = 0$ maka diperoleh $a = b = y = 0$ sehingga diperoleh pasangan $(0, 0, 0, 0)$

Jika $x = 1$ maka dengan memasukkan nilai $x$ ini ke kedua persamaan akan diperoleh pasangan $(2, 3, 1, 5)$ dan $(3, 2, 1, 5)$,

Jika $x \geq 2$, ide dari soal ini adalah membatasi nilai $a + b$ yaitu dengan menggunakan fakta $a + b = xy \geq 2y \geq x + y = ab$. dari sini diperoleh solusi $(1, 5, 2, 3)$, $(5, 1, 2, 3)$ dan $(2, 2, 2, 2)$.

Karena kesimetrian dari $x$ dan $y$ didapat bahwa jika $(a, b, x, y)$ solusi maka $(a, b, y, x)$ juga solusi.

Jadi semua pasangan $(a, b, x, y)$ yang memenuhi adalah $(0, 0, 0, 0)$, $(2, 3, 1, 5)$, $(2, 3, 5, 1)$, $(3, 2, 1, 5)$, $(3, 2, 5, 1)$, $(1, 5, 2, 3)$, $(1, 5, 3, 2)$, $(5, 1, 2, 3)$ $(5, 1, 3, 2)$, dan $(2, 2, 2, 2)$.

**Soal 2.** Karena akar kuadrat dan yang di dalam bentuk akar selalu non-negati, maka $x, y, z \geq 1$ dan $y \geq z^2$, $z \geq x^2$, $x \geq y^2$. Sehingga

$$x \geq y^2 \geq y \geq z^2 \geq z \geq x^2. \qquad (*)$$

Karena $x \geq x^2$ dan $x \geq 1$ (sehingga $x^2 \geq x$) maka $x^2 = x$. Akibatnya $x = 1$. Berdasarkan (*), haruslah $x = y = z = 1$. Setelah dicek ke persamaan awal, ternyata $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ memenuhi.

**Soal 3.** $w(m)$ adalah banyaknya pertemuan yang melibatkan $m$ teman.

$E(m)$ adalah banyaknya pertemuan yang melibatkan TEPAT $m$ teman.

$w(1) = \binom{6}{1} 11 = 66$
$w(2) = \binom{6}{2} 6 = 90$
$w(3) = \binom{6}{3} 4 = 80$
$w(4) = \binom{6}{4} 3 = 45$
$w(5) = \binom{6}{5} 3 = 18$
$w(6) = \binom{6}{6} 10 = 10$

Berdasarkan prinsip inklusi-ekslusi

$E(0) = S - w(0) + w(1) - w(2) + w(3) - w(4) + w(5) - w(6)$

$9 = S - 66 + 90 - 80 + 45 - 18 + 10$

Dengan demikian $S = 28$.

**Soal 4.** Misalkan $H = H_1, H_2$, dan $H_3$ berturut-turut menyatakan titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari $A, B$, dan $C$.

(i) Buat lingkaran luar $\Gamma_1$ dan $Gamma_2$ dari segitiga $ABH$ dan segitiga $ACH_1$ ; jelas bahwa $AB$ dan $AC$ merupakan diameter dari $\Gamma_1$ dan $\Gamma_2$.

(ii) Titik simetri dari $H_2$ terhadap garis $AB$ nyatakan sebagai titik $K_2$. Demikian juga $K_3$ merupakan titik simetri dari $H_3$ terhadap $AC$.

(iii) Karena $\angle AK_2B = \angle AK_3C = 90^0$, maka $K_2 \in \Gamma_1$ dan $K_3 \in \Gamma_2$. Dengan demikian : $AB \geq K_2H_1$ dan $AC \geq K_3H_1$.

(iv) Menurut teorema Ptolemy : $AB.K_2H_1 = AK_2.BH_1 + BK_2.AH_1$ sehingga
$$K_2H_1 = \frac{AK_2.BH_1}{AB} + \frac{BK_2.AH_1}{AB}$$
Karena segitiga $ABK_2$ dan segitiga $ABH_2$ sama dan sebangun, maka $AK_2 = AH_2$ dan $BK_2 = BH_2$, sehingga
$$K_2H_1 = \frac{AH_2}{AB}.BH_1 + \frac{BH_2}{AB}.AH_1 = BH_1 \cos\angle BAC + AH_1 \sin\angle BAC.$$
Dengan cara yang sama, diperoleh :
$$K_3H_1 = CH_1 \cos\angle BAC + AH_1 \sin\angle BAC.$$

(v) Dengan demikian:
$$\begin{aligned} AB + AC &\geq K_2H_1 + K_3H_1 \\ &= BH_1 \cos\angle BAC + AH_1 \cos\angle BAC + CH_1 \cos\angle BAC + AH_1 \sin\angle \\ &= (BH_1 + CH_1) \cos\angle BAC + 2AH_1 \cos\angle BAC \\ &= BC \cos\angle BAC + 2AH \sin\angle BAC. \end{aligned}$$

**Soal 5.** Diketahui $p_0 = 1$ dan $p_i$ bilangan prima ke-$i$, untuk $i = 1, 2, \ldots$; yaitu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, .... Bilangan prima $p_i$ dikatakan *sederhana* jika
$$p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$$
untuk semua bilangan bulat positif $n$. Tentukan semua bilangan prima yang sederhana.

**Jawaban:** Semua bilangan prima $p \geq 3$

Untuk $p = 2$ tidak memenuhi, sebab untuk $n = 2$, $2^{(2^2)} = 16 = 1(2!)^4$.

Misalkan $p_i \geq 3$. Untuk $n = 1$, $p_i^{(n^2)} = p_i^1 > p_{i-1} = p_{i-1}(1!)^4 = p_{i-1}(n!)^4$.

Andaikan pernyataan benar untuk $n$, yaitu $p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$. Akibatnya, membuktikan

$$p_i^{n^2} p_i^{2n+1} = p_i^{((n+1)^2)} > p_{i-1}(n+1)!)^4 = (p_{i-1}(n!)^4)(n+1)^4$$

cukup membuktikan $p_i^{2n+1} \geq 3^{2n+1} \geq (n+1)^4$.

**Sifat**: Untuk semua bilangan asli $n$ berlaku $3^{2n+1} \geq (n+1)^4$. **Perlu bukti sendiri, tapi dalam teks 2009 ada**

**Olimpiade Sains Nasional**
**Bidang Matematika SMA/MA**
**Tahun 2012**

**Soal 1**. Misalkan $FPB(a,b) = d$ maka kita dapat tulis $a = dx$ dan $b = dy$ untuk suatu bilangan asli $x$ dan $y$ dengan $FPB(x,y) = 1$. Substitusikan ke persamaan yang diberikan kita peroleh

$$\begin{aligned} n &= FPB\,(a,b) + KPK\,(a,b) - a - b \\ &= dxy - dx - dy + d \\ &= d\,(x-1)\,(y-1)\,. \end{aligned}$$

Sekarang perhatikan bahwa jika $n$ genap maka kita dapat memilih $d = 1$, $x - 1 = 1$, dan $y - 1 = n$ yang selanjutnya kita peroleh $d = 1$, $x = 2$, dan $y = n+1$, yang jelas bahwa $FPB(2, n+1) = 1$ karena $n+1$ ganjil. Dari sini kita peroleh solusi $a = 2$ dan $b = n+1$, yang ini jelas memenuhi persamaan awal. Jadi semua bilangan genap $n$ memenuhi kondisi yang diminta.

Sekarang akan kita buktikan bahwa setiap bilangan ganjil $n$, tidak memenuhi kondisi. Andaikan terdapat $a$ dan $b$ yang memenuhi $FPB(a,b)+KPK(a,b) = a+b+n$ dengan $n$ ganjil. Perhatikan bahwa persamaan ini ekivalen dengan $d(x-1)(y-1) = n$ dengan $FPB(x,y) = 1$. Karena $n$ ganjil maka $d$, $x-1$, dan $y-1$ semuanya ganjil. Namun ini akan berakibat $x$ dan $y$ keduanya genap yang tentu saja berakibat $FPB(x,y) = 2$. Ini kontradiksi dengan $FPB(x,y) = 1$. Jadi untuk $n$ ganjil, tidak terdapat bilangan asli $a$ dan $b$ yang memenuhi persamaan.

Jadi $n$ yang dimaksud pada soal adalah semua bilangan genap $n$.

**Soal 2**. Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM diperoleh

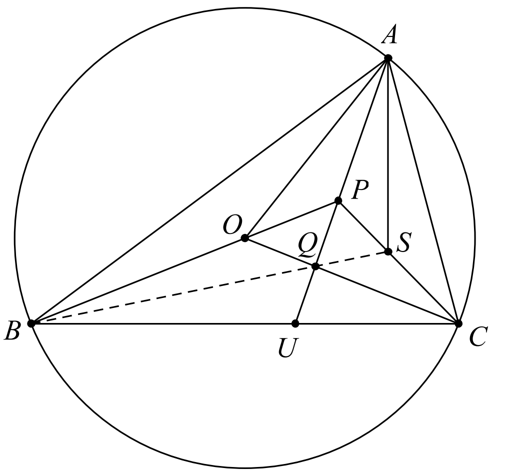
$$\begin{aligned} (1+a_1)^2 &\geq (2\sqrt{a_1})^2 = 2^2 a_1 \\ (1+a_2)^3 &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_2\right)^3 \geq \left(3\sqrt[3]{\frac{a_2}{2^2}}\right)^3 = 3^3\frac{a_2}{2^2} \\ &\vdots \\ (1+a_n)^{n+1} &= \left(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n \text{ kali}}+a_n\right)^{n+1} \\ &\geq \left((n+1)\sqrt[n]{\frac{a_n}{n^n}}\right)^{n+1} = (n+1)^{n+1}\frac{a_n}{n^n}. \end{aligned}$$

Bila semua ketaksamaan di atas dikalikan diperoleh

$$\begin{aligned}
& (1+a_1)^2 (1+a_2)^3 \cdots (1+a_n)^{n+1} \\
\geq \; & \left(2^2 a_1\right) \left(3^3 \frac{a_2}{2^2}\right) \cdots \left((n+1)^{n+1} \frac{a_n}{n^n}\right) \\
= \; & n^n a_1 a_2 \cdots a_n .
\end{aligned}$$

Kesamaan berlaku jika dan hanya jika $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $\ldots$, $a_n = \frac{1}{n}$.

**Soal 3**. Misalkan garis bagi $\angle BAC$ memotong $BC$ di titik $U$ dan garis tinggi segitiga $ABC$ dari titik $A$ memotong garis $CP$ di titik $S$. Yang harus dibuktikan adalah $PU$, $CO$ dan $BS$ konkuren. Kalau ini terbukti, maka $S = R$ yang berakibat $AR$ tegak lurus $BC$ (karena $AS$ sudah tegak lurus $BC$)




Pertama, karena $AO = BO$ dan karena $AS$ garis tinggi, maka

$$\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle ACB}{2} = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAS.$$

Sekarang kembali ke soal, dengan teorema Ceva, cukup ditunjukkan bahwa

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CS}{SP} \cdot \frac{PO}{OB} = 1.$$

Langkah pertama, dengan teorema garis bagi diperoleh

$$\frac{BU}{UC} = \frac{AB}{AC}.$$

Langkah kedua,

$$\frac{CS}{SP} = \frac{[ACS]}{[APS]} = \frac{\frac{1}{2}AS \cdot AC \cdot \sin \angle CAS}{\frac{1}{2}AS \cdot AP \cdot \sin \angle SAP} = \frac{AC \cdot \sin \angle CAS}{AP \cdot \sin \angle SAP}.$$

Dengan cara yang sama,

$$\frac{PO}{BO} = \frac{AP \cdot \sin \angle PAO}{AB \cdot \sin \angle BAO}.$$

Terakhir, $\angle BAO = \angle CAS$ dan $\angle PAO = \angle SAP$, maka

$$\frac{BU}{UC} \cdot \frac{CS}{SP} \cdot \frac{PO}{OB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC \cdot \sin \angle CAS}{AP \cdot \sin \angle SAP} \cdot \frac{AP \cdot \sin \angle PAO}{AB \cdot \sin \angle BAO} = 1.$$

**Soal 4.** Jawab: $\binom{2012}{1006}$

Misalkan koordinat $P$ adalah $(r, s)$, koordinat $A_i$ adalah $(x_i, y_i)$ dan koordinat $B_i$ adalah $(p_i, q_i)$.

Koordinat $P_1$ adalah $(2p_1 - r, 2q_1 - s)$ karena $B_1$ merupakan titik tengah dari $PP_1$.

Koordinat $P_2$ adalah $(2p_2 - 2p_1 + r, 2q_2 - 2q_1 + s)$ karena $B_2$ merupakan titik tengah dari $P_1P_2$.

...

Koordinat $P_{2012}$ adalah sebagai berikut:

Absisnya adalah $r + 2(p_2 + p_4 + \cdots + p_{2012}) - 2(p_1 + p_3 + \cdots + p_{2011})$

Ordinatnya adalah $s + 2(s_2 + s_4 + \cdots + s_{2012}) - 2(s_1 + s_3 + \cdots + s_{2011})$.

Perhatikan bahwa koordinat $P$ adalah tetap, sehingga faktor utama yang mempengaruhi koordinat $P_{2012}$ adalah $B_i$ mana yang masuk ke posisi genap dan mana yang masuk ke posisi ganjil. Sebagai contoh, bila $B_1, B_3$ dan $B_5$ ditukar-tukar, ini tidak akan mempengaruhi posisi $P_{2012}$. Demikian pula jika $B_2$, dan $B_4$ ditukar.

Semua $B_i$ ini adalah permutasi dari $A_i$, sehingga ada $\binom{2012}{1006}$ cara untuk memilih $A_i$ mana yang masuk ke posisi genap, dan sisanya akan masuk ke posisi ganjil.

Kita sudah menunjukkan bahwa ada paling banyak $\binom{2012}{1006}$ bayangan $P$ yang mungkin. Kita belum membuktikan bahwa misalnya $B_1$ dan $B_5$ ditukar, maka bayangan yang terbentuk pasti berbeda.

Sekarang akan kita tunjukkan bahwa ada $Ai$ sedemikian sehingga ada tepat $\binom{2012}{1006}$ bayangan $P$ yang mungkin. Yakni, jika $B_i$ dan $B_j$ ditukar, di mana $i$ genap dan $j$ ganjil, maka bayangan yang terbentuk pasti berbeda.

Buatlah koordinat $A_i$ di $(2^i, 0)$ dan koordinat $P$ di $(0, 0)$. Misalkan $a_1, \ldots, a_{1006}$ adalah indeks yang terpilih untuk masuk posisi genap, dan

$b_1, \ldots, b_{1006}$ adalah indeks yang terpilih untuk masuk posisi ganjil dalam permutasi $B_i$.

Sekarang, posisi bayangan $P$ tergantung dari jumlah berikut ini:

$$\begin{aligned} & \left(2^{a_1} + \cdots + 2^{a_{1006}}\right) - \left(2^{b_1} + \cdots + 2^{b_{1006}}\right) \\ = \ & 2\left(2^{a_1} + \cdots + 2^{a_{1006}}\right) - \left(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2012}\right) \end{aligned}$$

Sekarang, nilai dari suku pertama akan tergantung oleh indeks mana saja yang terpilih masuk posisi genap. Jika $X = 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_{1006}}$, maka tinjau representasi biner dari $X$. Digit-digit yang berisi 1 adalah $a_i$ dan digit-digit yang berisi 0 adalah $b_i$. Jika kita memilih indeks yang berbeda untuk masuk ke posisi genap dan ganjil, maka nilai $X$ juga akan terubah, sehingga posisi bayangan $P$ juga berubah.

**Soal 5**. Jika $m = 1$ atau $n = 1$, kasus trivial. Selanjutnya asumsikan bahwa $m, n > 1$. Sebutlah kumpulan bilangan bernilai 0 atau 1 berbentuk persegi panjang *baik* jika pada suatu baris, bilangan-bilangan dari kiri ke kanan tidak pernah naik dan pada suatu kolom, bilangan-bilangan dari atas ke bawah tidak pernah naik. Pertama-tama, akan dibuktikan lemma berikut.

**Lema**. *Jika $M$ adalah kumpulan bilangan baik, maka terdapat suatu baris atau suatu kolom pada $M$ yang memiliki bilangan-bilangan yang sama (0 semua atau 1 semua).*

*Bukti.* Andaikan tak ada baris yang semua bilangannya sama semua. Karena bilangan pada satu baris tak pernah naik, haruslah untuk setiap baris, angka paling kiri adalah 1 dan angka paling kanan adalah 0. Dengan demikian, pada kolom paling kiri, semua bilangannya sama, yaitu 1. Terbukti.

Kembali ke soal. Berdasarkan lema di atas, karena $P$ baik, maka terdapat baris atau kolom di $P$ yang semua isinya sama (0 semua atau 1 semua). Tanpa mengurangi asumsi, terdapat baris yang isinya sama (kasus kolom yang isinya sama analog). Bandingkan baris tersebut pada $P$ dan $Q$. Misal baris itu memiliki $k$ bilangan. Perhatikan bahwa penyelesaian dari

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$$

dengan $a_i \in \{0, 1\}$ adalah $a_i = 0$ untuk setiap $i$ dan penyelesaian dari

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = k$$

dengan $a_i \in \{0, 1\}$ adalah $a_i = 1$ untuk setiap $i$. Dengan demikian, isi baris tersebut pada $P$ dan $Q$ adalah sama. Selanjutnya, kita warnai baris tersebut dengan warna hitam.

Sekarang kita punya kumpulan bilangan $P_0$ dan $Q_0$ berbentuk persegi panjang dengan $P_0$ semuanya terisi dan $Q_0$ kosong. $P_0$ juga baik. Dengan mengulangi langkah ini (mewarnai suatu baris dengan warna hitam), dalam berhingga banyaknya langkah, semua bilangan pada $Q$ berwarna hitam. Karena pada setiap langkah, kumpulan bilangan yang dihitamkan pada $Q$ persis sama dengan kumpulan bilangan yang dihitamkan pada $P$, akhirnya kita peroleh bahwa $P = Q$.

**Soal 6**. Andaikan ada fungsi $f$ yang memenuhi syarat pada soal. Untuk sebarang $x > y > 0$, perhatikan bahwa $x - y \in \mathbb{R}^+$ dan

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-y+y) = f(x-y) + f(y) + \frac{1}{2012} \\ &> f(y) + \frac{1}{2012}. \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) - f(y) > \frac{1}{2012}$ untuk sebarang bilangan real positif $x > y$. Dengan prinsip teleskopis, untuk sebarang bilangan asli $n$ berlaku

$$\begin{aligned} f(1) &= \left[f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right] + \cdots \\ &\quad + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] + f\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &> \underbrace{\frac{1}{2012} + \frac{1}{2012} + \cdots + \frac{1}{2012}}_{n \text{ kali}} + f\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &> \frac{n}{2012}. \end{aligned}$$

Namun, ini tidak mungkin terjadi karena untuk $n = \lceil 2012 f(1) \rceil$ berlaku $n \geq 2012 f(1)$. Jadi pengandaian kita salah dan kesimpulan terbukti.

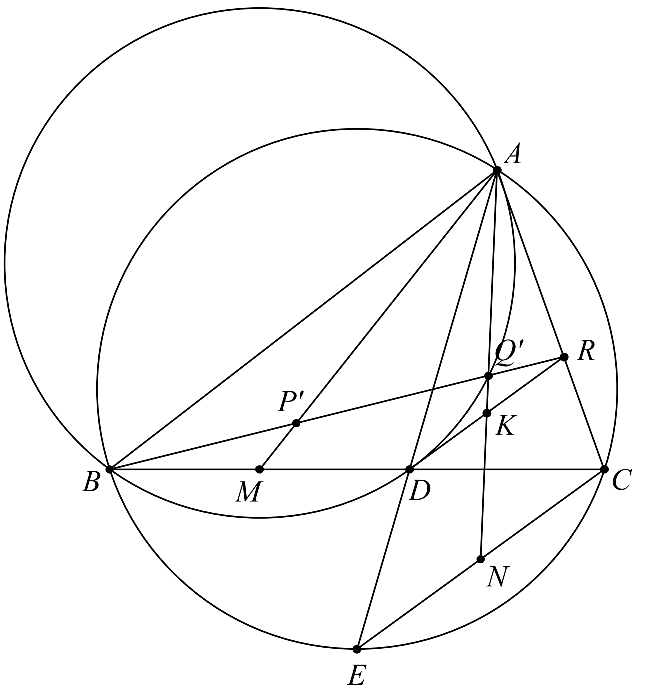
**Soal 7**. Persamaan $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ dapat kita tulis menjadi $\sqrt{y} = \sqrt{n} - \sqrt{x}$. Dengan menguadratkan kedua ruas, kita peroleh $y = n + x - 2\sqrt{nx}$. Dari sini dapat kita simpulkan bahwa $\sqrt{nx}$ bilangan rasional, tetapi $n$ dan $x$ merupakan bilangan asli sehingga $\sqrt{nx}$ juga merupakan billangan asli yaitu $nx = m^2$ untuk suatu bilangan asli $m$. Dari sini diperoleh solusi $x = \frac{m^2}{n}$ dan $y = \frac{(n-m)^2}{n}$ dengan $m < n$ tentunya.

($\Longleftarrow$) Perhatikan bahwa jika $n$ habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1, katakan

$p^2$ maka $n = p^2 t$ untuk suatu bilangan asli $t$. Untuk kasus ini, kita dapat memilih $m = pt$ yang jelas $m < n$ dan $\frac{m^2}{n} = \frac{p^2t^2}{p^2t} = t \in \mathbb{N}$, yang artinya ada bilangan asli $x$ dan $y$ yang memenuhi persamaan.

($\Longrightarrow$) Andaikan $n$ tidak habis dibagi oleh kuadrat sempurnya lebih besar dari 1 maka $n = p_1p_2\cdots p_k$ untuk suatu bilangan-bilangan prima berbeda $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Kita tahu bahwa solusi dari persamaan $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{n}$ adalah $x = \frac{m^2}{n}$ dan $y = \frac{(m-n)^2}{n}$ dengan $m < n$. Agar $x$ bulat, haruslah $n|m^2$, artinya $p_i|m^2$ untuk setiap $i$, akibatnya $p_i|m$ yang tentu saja berakibat $n|m$. Hal ini tidaklah mungkin karena $m < n$. (selesai karena kita telah membuktikan dua arah)

**Soal 8**. Kita gunakan notasi // untuk kesejajaran dua garis dan $\sim$ untuk kesebangunan dua segitiga. Misalkan $K$ adalah titik potong garis $AN$ dan $DR$.




Pertama, karena lingkaran luar segitiga $ADR$ menyinggung $BC$ di $D$ dan $AD$ adalah garis bagi $\angle BAC$, maka $\angle CDR = \angle DAR = \angle BAD$ sehingga

$$\begin{aligned} \angle ADR &= \angle ADC - \angle CDR = (\angle ABD + \angle BAD) - \angle BAD \\ &= \angle ABD = \angle ABC = \angle AEC \end{aligned}$$

sehingga $ADR \sim ABD$ dan juga $DR \,//\, EC$. Ini berakibat $K$ adalah titik tengah $DR$ (karena $N$ titik tengah $EC$) sehingga $MK \,//\, BR$ (karena $M$

titik tengah $BD$). Lebih lanjut, karena $ADR \sim ABD$, maka $ABM \sim ADK$ dan $AMD \sim AKR$ (ini juga karena $M$ titik tengah $BD$). Akibatnya

$$\angle MAK = \angle MAD + \angle DAK = \angle MAD + \angle BAM = \angle BAD.$$

Karena $\angle CDR = \angle BAD$, maka $AMDK$ segiempat talibusur. Sekarang misalkan garis $BR$ memotong $AM$ di $P'$ dan $AN$ di $Q'$. Akan dibuktikan bahwa $P' = P$ dan $Q' = Q$.

Dari $MK \,//\, BR$ dan $AMDK$ segiempat talibusur, diperoleh

$$\angle AP'R = \angle AMK = \angle ADK = \angle ADR$$

sehingga $ARDP'$ segiempat talibusur juga. Dengan kata lain, titik $P'$ terletak pada lingkaran luar segitiga $ARD$ dan juga terletak pada garis $AM$. Disimpulkan bahwa $P' = P$.

Dari $AMDK$ segiempat talibusur dan $MK \,//\, BR$ diperoleh

$$\angle AQ'B = \angle AKM = \angle ADM = \angle ADB$$

sehingga $ABDQ'$ segiempat talibusur. Dengan kata lain, titik $Q'$ terletak pada lingkaran luar segitiga $ABD$ dan juga terletak pada garis $AN$. Disimpulkan bahwa $Q' = Q$.

Jadi, titik $P$ dan $Q$ terletak pada garis $BR$ atau dengan kata lain, $B, P, Q, R$ terletak pada satu garis.

## Asian Pacific Mathematics Olympiad 2012

**Soal 1**. Kita gunakan notasi $[XYZ]$ untuk menyatakan luas dari segitiga $XYZ$. Misalkan $x = [PAB]$, $y = [PBC]$ dan $z = [PCA]$.

Dari

$$\frac{y}{z} = \frac{[BCP]}{[ACP]} = \frac{BF}{AF} = \frac{[BPF]}{[APF]} = \frac{x-1}{1}$$

diperoleh $y = z(x-1)$ yang menghasilkan $(z+1)x = x+y+z$. Dengan cara yang sama, diperoleh juga bahwa $(x+1)y = x+y+z$ dan $(y+1)z = x+y+z$. Jadi, kita mempunyai $(x+1)y = (y+1)z = (z+1)x$.

Kita dapat mengasumsikan tanpa mengurangi keberlakuan secara umum bahwa $x \le y, z$. Seandainya $y > z$, maka $(y+1)z > (z+1)x$ yang merupakan suatu kontradiksi. Demikian juga dengan pengandaian $z > y$ akan menyebabkan kontradiksi $(y+1)z > (x+1)y$. Oleh karena itu, haruslah $y = z$. Dari $(x+1)y = (y+1)z$, akan diperoleh juga bahwa $x = y$. Jadi kita memperoleh $x = y = z$. Kita sekarang mempunyai

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{z} = 1$$

sehingga $x = 2$. Jadi, $x = y = z = 2$ dan akibatnya $[ABC] = x+y+z = 6$.

**Soal 3**. Pertama, karena $\frac{n^p+1}{p^n+1}$ adalah bilangan asli, maka $p^n \le n^p$. Untuk $p = 2$, ini berarti bahwa $2^n \le n^2$ harus berlaku. Menggunakan induksi, mudah dibuktikan bahwa $2^n > n^2$ untuk setiap $n \ge 5$. Dengan demikian, untuk $p = 2$, maka $n \le 4$. Kita dapat mengecek dengan mudah bahwa $(p,n) = (2,2), (2,4)$ memang memenuhi syarat pada soal sementara $(2,3)$ tidak memenuhi.

Selanjutnya, kita tinjau kasus $p \ge 3$.

Misalkan $s$ sebarang bilangan asli dengan $s \ge p$. Perhatikan bahwa jika berlaku $s^p \le p^s$, maka

$$\begin{aligned}
(s+1)^p &= s^p\left(1+\frac{1}{s}\right)^p \le p^s\left(1+\frac{1}{p}\right)^p \\
&= p^s \sum_{r=0}^{p} \binom{r}{p} \frac{1}{p^r} < p^s \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r!} \\
&\le p^s \left(1 + \sum_{r=1}^{p} \frac{1}{2^{r-1}}\right) \\
&< p^s (1+2) \le p^{s+1}.
\end{aligned}$$

Jadi akan berlaku $(s+1)^p < p^{s+1}$. Dari sini dapat disimpulkan dengan induksi matematika pada $n$ bahwa jika $n > p$, maka $n^p < p^n$. Jadi agar syarat $p^n \leq n^p$ terpenuhi, haruslah $n \leq p$.

Sekarang perhatikan bahwa $p^n+1$ membagi $n^p+1$. Karena $p^n+1$ genap, haruslah $n^p+1$ juga genap yang berakibat $n$ ganjil. Ini mengakibatkan $p^n+1$ habis dibagi $p+1$ dan selanjutnya mengakibatkan $n^p+1$ juga habis dibagi oleh $p+1$. Jadi, $n^p \equiv (-1) \bmod (p+1)$, sehingga $n^{2p} \equiv 1 \bmod (p+1)$. Sekarang ambil bilangan asli $e$ terkecil sehingga $n^e \equiv 1 \bmod (p+1)$. Dengan demikian, $e$ membagi $2p$.

Jika $e = 1, p$, maka $n^p \equiv 1 \bmod (p+1)$ yang bertentangan dengan hasil sebelumnya. Selanjutnya karena $n$ dan $p+1$ relatif prim, maka berdasarkan Teorema Euler, $n^{\phi(p+1)} \equiv 1 \bmod (p+1)$. Dengan demikian,

$$e \leq \phi(p+1) < p+1 < 2p.$$

Jadi satu-satunya kemungkinan adalah $e = 2$.

Jadi,

$$-1 \equiv n^p \equiv \left(n^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \cdot n \equiv n \bmod (p+1),$$

yang berakibat $p+1$ membagi $n+1$, sehingga $p \leq n$. Bersama-sama dengan hasil sebelumnya $n \leq p$, kita simpulkan bahwa $n = p$. Jelas bahwa $(n,p) = (p,p)$ memenuhi syarat yang diminta di soal.

Kita simpulkan bahwa pasangan $(n,p)$ yang memenuhi syarat pada soal adalah $(2,4)$ dan $(p,p)$ untuk sebarang bilangan prima $p$.

**Soal 4**. Jika $AB = AC$, maka $BF = CF$ dan kesimpulan pada soal jelas terpenuhi. Untuk selanjutnya, kita asumsikan tanpa mengurangi keberlakuan secara umum bahwa $AB > AC$.

Pertama akan dibuktikan bahwa $\angle AEM = 90^\circ$. Untuk ini, pilih titik $K$ pada $\Gamma$ sehingga $AK$ adalah diameter dari $\Gamma$. Kita dapatkan

$$\angle BCK = \angle ACK - \angle ACB = 90^\circ - \angle ACB = \angle CBH$$

dan

$$\angle CBK = \angle ABK - \angle ABC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BCH,$$

dan dari sini kita simpulkan bahwa segitiga $BCK$ dan $CBH$ sebangun yang berakibat $BKCH$ jajaran genjang dan diagonal $HK$ melalui titik tengah diagonal $BC$, yakni titik $M$. Dengan kata lain, tiga titik $H, M, K$ konkuren sehingga $\angle AEM = \angle AEK = 90^\circ$ seperti yang telah diklaim.

Sekarang karena $\angle AEM = 90^\circ = \angle ADM$, kita simpulkan bahwa $A, E, D, M$ terletak pada satu lingkaran, dan kita peroleh juga $\angle AMB = \angle AED = \angle AEF = \angle ACF$. Dan karena $\angle ABM = \angle ABC = \angle AFC$, maka segitiga $AMB$ sebangun dengan segitiga $ACF$ dan kita peroleh $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{CF}$.

Dengan cara serupa, kita dapatkan juga bahwa segitiga $AMC$ dan segitiga $ABF$ sebangun dan $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{BF}$. Dari dua kesamaan tersebut dan karena $BM = CM$, kita peroleh

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CF}{AC} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{BM}{AM} = \frac{BF}{CF}.$$

**Soal 5**. Pertama, perhatikan bahwa untuk sebarang $1 \leq i, j \leq n$, karena $a_i a_j \leq \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}$, kita mempunyai

$$n - a_i a_j \geq n - \frac{a_i^2 + a_j^2}{2} \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} > 0.$$

Jika kita definisikan $b_i = |a_i|$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, maka kita peroleh $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = n$ dan

$$\frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{1}{n - b_i b_j}$$

untuk sebarang $i, j$. Ini menunjukkan bahwa kita cukup menunjukkan pernyataan pada soal dalam kasus dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ semuanya tak negatif. Jadi, kita asumsikan mulai dari sekarang bahwa $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

Sekarang perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{n}{n - a_i a_j} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( 1 + \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} \right) \\ &= \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j}. \end{aligned}$$

Jadi, cukup dibuktikan bahwa

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}$$

atau ekivalen dengan

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}.$$

Jika untuk suatu $1 \leq i \leq n$ berlaku $a_i^2 = n$, maka $a_j = 0$ untuk setiap $j \neq i$. Dalam hal ini,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} = 0 < \frac{n}{2}.$$

Selanjutnya, asumsikan bahwa $a_i^2 < n$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Sekarang kita gunakan ketaksamaan AM-GM dan Cauchy-Schwarz untuk mendapatkan

$$
\begin{aligned}
\frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} &\leq \frac{\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)^2}{n - \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_i + a_j)^2}{(n - a_i^2) + \left(n - a_j^2\right)} \\
&\leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a_i^2}{n - a_j^2} + \frac{a_j^2}{n - a_i^2} \right).
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$
\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} &\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{a_i^2}{n - a_j^2} + \frac{a_j^2}{n - a_i^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{a_j^2}{n - a_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{n - a_i^2}{n - a_i^2} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

seperti yang diinginkan.