SELEKSI TINGKAT PROPINSI

CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2018

MATEMATIKA SMA/MA

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah ....

   Solusi: $\boxed{4}$ Tulis ulang $a^2 + b^2 = a + b$ sebagai $2a^2 + 2b^2 - 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2 + (2b-1)^2 = 2$. Ini hanya terjadi jika $2a - 1 = \pm 1$ dan $2b - 1 = \pm 1$ yang selanjutnya didapat $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (0, 1), (1, 1)$. Dengan demikian ada 4 pasangan terurut yang memenuhi.

2. Diberikan trapesium $ABCD$, dengan AD sejajar BC. Diketahui $BD = 1$, $\angle DBA = 23°$, dan $\angle BDC = 46°$. Jika perbandingan $BC : AD = 9 : 5$, maka panjang sisi CD adalah ....

   Solusi: $\boxed{\mathbf{4/5}}$ Misalkan E titik potong antara BC dengan garis melalui D sejajar AB, maka diperoleh $BE = AD$ dan $\angle BDE = 23°$. Akibatnya DE merupakan garis bagi $\angle BDC$. Dengan menggunakan teorema garis bagi, diperoleh:

$$CD = \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{BE} = \frac{BC - BE}{BE} = \frac{BC}{AD} - 1 = 9/5 - 1 = 4/5.$$

3. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_1^2 + \cdots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \cdots$ adalah dua deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Nilai $r_1 + r_2$ adalah ....

   Solusi: $\boxed{1}$ Jumlah deret pertama adalah

$$\frac{1}{1 - r_1} = r_1,$$

   yang ekivalen dengan

$$1 = r_1 - r_1^2 \Leftrightarrow r_1^2 - r_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4a}\right).$$

   Dengan cara yang sama diperoleh

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4a}\right).$$

   Karena r_1 dan r_2 berbeda, maka $r_1 + r_2 = 1$.

4. Diketahui $S = \{10, 11, 12, \ldots, N\}$. Suatu unsur di S dikatakan *trubus* jika jumlah digit-digitnya merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli. Jika S memiliki tepat 12 trubus, maka nilai terbesar N yang mungkin adalah ....

   Solusi: $\boxed{\mathbf{124}}$ Tiga belas bilangan pertama yang memenuhi adalah 10, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 100, 107, 116, 125, dst. Dengan demikian, N terbesar yang memenuhi adalah 124.

5. Bilangan asli terkecil n sehingga $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ habis dibagi 30 adalah ....

Solusi: $\boxed{8}$ Misalkan $N = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Perhatikan bahwa jika $2n < 15$ maka faktor 5 di pembilang dan penyebut sama-sama muncul dua kali sehingga N bukan merupakan kelipatan 5. Untuk $n = 8$ kita punya $N = 12870$ yang jelas merupakan kelipatan 30.

6. Diberikan segitiga tak samakaki ABC dengan M titik tengah BC. Misalkan K adalah titik berat segitiga ABM. Titik N pada sisi AC sehingga luas segiempat $KMCN$ setengah dari luas segitiga ABC. Nilai $\dfrac{AN}{NC}$ adalah ....

Solusi: $\boxed{\mathbf{1/2}}$ Misalkan D dan E pada garis berat AM dan $AD = DE = EM$. Misalkan garis sejajar BC melalui D memotong AC di N' dan memotong AK di F. Karena $KE \parallel BC \parallel FN'$ maka kita punya fakta-fakta berikut $KE = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}BM$, $FD = \frac{1}{2}KE$, dan $DN' = 2\ FD = KE$. Hal ini berarti luas ADN' sama dengan luas KEM; luas KEN' = luas DEN' . Ingat bahwa AF garis berarti

$$[KMCN'] = [KEM]+[KEN']+[EMCN'] = [ADN']+[DEN']+[EMCN'] = [AMC] = \frac{1}{2}[ABC].$$

Akibatnya N' adalah titik yang dicari sehingga $AN' : N'C = 1 : 2$.

(*Catatan*). Bukti ketunggalan titik N bisa didapat dari ketaksamaan apabila titik N bergeser dari titik N'; atau dengan pendekatan fungsi kontinu dan nilai antara dengan meninjau fungsi luas $KMCN$ dengan N bergerak dari A ke C.

7. Di dalam suatu kotak terdapat n kelereng merah dan m kelereng biru. Diambil 5 kelereng sekaligus. Jika peluang terambilnya 3 kelereng merah dan 2 biru $\dfrac{25}{77}$, maka nilai terkecil $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah ....

Solusi: $\boxed{\mathbf{61}}$ Diperoleh

$$\frac{25}{77} = \frac{\dbinom{n}{3}\dbinom{m}{2}}{\dbinom{n+m}{5}}$$

Karena $77 = 7.11$ maka $m + n \geq 11$. Untuk $m + n = 11$, pembilang $25 = 5.5$ dan $n \leq 11$. Jika $10 \leq n$, maka faktor pembilang hanya muncul faktor 5 sebanyak 1. Jika $n = 8$ atau $n = 9$, maka faktor 5 dari pembilang hanya ada 1. Begitu juga jika $n = 7$. Jika $n = 6$ dan $m = 5$ tidak memenuhi soal. Untuk $n = 5$ dengan $m = 6$, memenuhi soal.

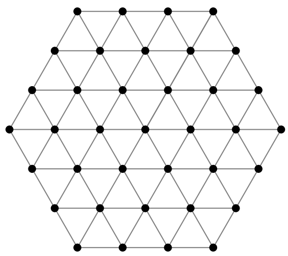
8. Misalkan $P(x)$ suatu polinom (suku banyak) *tak konstan* dengan koefisien bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $P(10) = 2018$. Misalkan m dan M berturut-turut adalah nilai minimum dan nilai maksimum yang mungkin dari $P(1)$. Nilai $m + M$ adalah ....

Solusi: $\boxed{\mathbf{2020}}$ Karena $10^4 > 2018$, maka derajat $P(x)$ paling besar 3. Tulis $P(x) = a_3x^3 + a_2x + a_1x + a_0$ dengan a_0, a_1, a_2, a_3 bilangan bulat tak negatif dengan a_1, a_2, a_3 tidak semua nol. Karena $1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 2018$ (konstan), untuk mendapatkan nilai minimum $P(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$, algoritma *greedy* mengatakan ambil a_3 sebesar mungkin, kemudian a_2, a_1, terakhir a_0. Diperoleh $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$ dan $a_0 = 8$. Jadi $m = 2 + 0 + 1 + 8 = 11$. Sebaliknya, untuk mendapatkan nilai maksimum $P(1)$, pilih a_0 sebesar mungkin, kemudian a_1, a_2, dan a_3. Karena $P(x)$ tidak konstan, maka $a_0 \neq 2018$. Karena $P(10) - a_0$ habis dibagi 10, nilai terbesar yang mungkin untuk a_0 adalah 2008. Selanjutnya, $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$. Jadi, $M = 2009$. Dengan demikian, $m + M = 11 + 2009 = 2020$.

9. Sebuah provinsi terdiri dari sembilan kota yang diberi nama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dari kota a terdapat jalan langsung ke kota b jika dan hanya jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ merupakan bilangan dua digit yang habis dibagi 3. Dua kota *berbeda* a_1 dan a_n dikatakan terhubung jika terdapat barisan kota-kota $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sehingga terdapat jalan langsung dari a_i ke a_{i+1} untuk setiap $i = 1, \ldots, n-1$. Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah ....

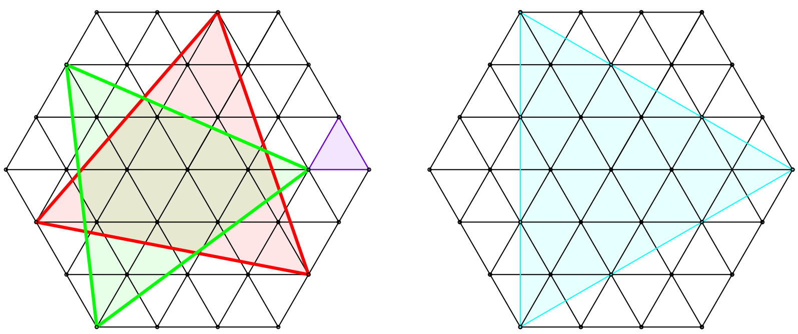
   Solusi: $\boxed{5}$ Kota 4 jelas terhubung dengan kota: 2,5,8 karena 42,45,48 habis dibagi tiga. Dengan menggunakan barisan: 4,2,1 dan 4,2,7 jelas bahwa 4 terhubung dengan kota 1 dan 7. Misalkan $a \equiv 0 \pmod 3$. Akan ditunjukkan bahwa 4 tidak terhubung dengan a. Misalkan $4, a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ merupakan barisan yang menghubungkan 4 dan a. Karena $4 \equiv 1 \pmod 3$ maka $a_1 \equiv 2 \pmod 3$. Akibatnya semua bilangan dalam barisan haruslah 1 atau 2 modulo 3. Jadi tidak mungkin a di dalam barisan. Dengan demikian 4 tidak terhubung dengan kota 3,6,9. Jadi 4 terhubung dengan 5 kota.

10. Diberikan 37 titik seperti pada gambar sehingga setiap dua titik yang bertetangga berjarak satu satuan. Dari setiap tiga titik berbeda digambar segitiga merah. Banyaknya kemungkinan panjang sisi segitiga merah yang sama sisi adalah ....



   Solusi: $\boxed{11}$ Misalkan $S_{x,y} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos(\frac{2}{3}\pi)} = \sqrt{x^2 + y^2 + xy}$.

   Panjang sisi yang mungkin (cek gambar) : $S_{1,0}$, $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{1,3}$, $S_{1,4}$, $S_{2,0}$, $S_{2,2}$, $S_{2,3}$, $S_{3,0}$, $S_{3,3}$, $S_{4,0}$. Beberapa diantaranya adalah sebagai berikut.



Gambar 1: $S_{1,1}$, $S_{1,4}$, $S_{2,3}$, $S_{3,3}$

11. Diambil secara acak suatu bilangan bulat positif k dengan $k \leq 2018$. Peluang k^{1009} bersisa 2 jika dibagi 2018 adalah ....

Solusi: $\boxed{\mathbf{1/2018}}$ Periksa bahwa $2018 = 2 \times 1009$; 1009 merupakan bilangan prima. Dengan demikian, $a^{1009} \equiv a \mod 1009$ untuk setiap bilangan bulat a menurut teorema kecil Fermat. Akibatnya, bilangan k yang memenuhi $k^{1009} \equiv k \mod 1009$ hanya ada dua, yaitu $k = 2$ dan $k = 2 + 1009 = 1011$. Namun karena 1011 ganjil, maka 1011^{1009} tidak mungkin kongruen 2 mod 2018. Jadi satu-satunya kemungkinan adalah $k = 2$. Jadi peluangnya adalah $\frac{1}{2018}$.

12. Diberikan bilangan real tak negatif a, b, c, d, e dengan $ab + bc + cd + de = 2018$. Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah ....

    Solusi: $\boxed{\mathbf{2\sqrt{2018}}}$ Dengan ketaksamaan $(x + y)^2 \geq 4xy$ diperoleh

    $$(a + b + c + d + e)^2 \geq 4(a + c + e)(b + d) \geq 4(ab + bc + cd + de) = 4 \times 2018.$$

    Jadi, $a + b + c + d + e \geq 2\sqrt{2018}$ dengan kesamaan ketika $c = d = e = 0$ dan $a = b = \sqrt{2018}$.

13. Banyaknya himpunan bagian (termasuk himpunan kosong) dari $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2017, 2018\}$ yang tidak memiliki dua unsur x dan y sehingga $xy = 2018$ ada sebanyak $m2^n$ dengan m ganjil. Nilai $m + n$ adalah ....

    Solusi: $\boxed{\mathbf{2023}}$ Perhatikan bahwa $(x, y) = (1, 2018)$ atau $(x, y) = (2, 1009)$ (atau permutasinya) dikarenakan 1009 merupakan bilangan prima. Jadi kita mencari banyaknya subhimpunan yang tidak memuat $\{1, 2018\}$ dan $\{2, 1009\}$. Banyaknya subhimpunan yang memuat $\{1, 2018\}$ atau $\{2, 1009\}$ adalah $2^{2016} + 2^{2016} = 2^{2017}$. Banyaknya subhimpunan yang memuat $\{1, 2, 1009, 2018\}$ adalah 2^{2014}. Jadi banyaknya subhimpunan yang diminta adalah $2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2014} = 9 \cdot 2^{2014}$. Jadi $m + n = 9 + 2014 = 2023$.

14. Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diketahui terdapat tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d merupakan barisan aritmetika. Nilai n adalah ....

    Solusi: $\boxed{\mathbf{79}}$ Misalkan beda dari barisan aritmetika tersebut adalah p, maka $d = a + 3p$. Karena $a \geq 1$ dan $a + 3p \leq n$ maka $3p < n \iff p < \lfloor n/3 \rfloor$ atau ekivalen dengan mengatakan $p < \lceil n/3 - 1 \rceil$. Untuk setiap nilai p, suku pertama a harus memenuhi $1 \leq a \leq (n - 3p)$ yaitu ada sebanyak $n - 3p$ yang mungkin. Dengan demikian, banyak pasangan (a, b, c, d) yang dimaksud adalah

    $$\sum_{p=1}^{N} (n - 3p) = Nn - 3N(N + 1)/2$$

    dengan $N = \lceil n/3 - 1 \rceil$. Dengan menulisakan $n = 3k + r$ mudah didapatkan $k = 26$ dan $r = 2$ sehingga $n = 79$.

15. Banyaknya bilangan asli n sehingga

    $$n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$$

    merupakan bilangan prima adalah ....

    Solusi: $\boxed{\mathbf{1}}$

    $$\begin{aligned} H(n) &= n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10 \\ &= (n^2 + n + 1)((n - 3)^2 + 1) \end{aligned}$$

    Untuk $n = 3$ diperoleh $H(3) = (9 + 3 + 1) \cdot 1 = 13$ bilangan prima. Untuk $n \neq 3$, $n^2 + n + 1 \geq 2$ dan $(n^3 + 1)(n - 3)^2 + 1 \geq 2$, akibatnya $H(n)$ pasti komposit.

16. Titik M terletak pada lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$. Nilai terbesar

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD}$$

yang mungkin adalah ....

Solusi: $\boxed{1}$ Misalkan sisi segilima adalah a dan b adalah panjang diagonal segilima beraturan. Dengan teorema Pytagoras di segiempat talibusur $ABME$ dan $ADMC$ didapat

$$a \cdot MB + a \cdot ME = b \cdot MA \qquad \text{dan} \qquad a \cdot MA = b \cdot MC + b \cdot MD.$$

akibatnya

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD} = \frac{\frac{b}{a}MA}{(1 + \frac{a}{b})MA} = \frac{b^2}{a^2 + ab} = 1.$$

Kesamaan yang terakhir didapat dari teorema Pytagoras pada segiempat talibusur $ABCD$, $b^2 = a^2 + ab$.

17. Untuk x, y bilangan real tak nol, jumlah nilai maksimum dan minimum

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2}$$

adalah ....

Solusi: $\boxed{\textbf{-1}}$ Misal $k = \frac{xy-4y^2}{x^2+4y^2}$. Dengan membagi pembilang dan penyebut k dengan y^2 diperoleh $k = \frac{t-4}{t^2+4}$, dengan $t = \frac{x}{y}$, yang ekivalen dengan persamaan kuadrat $kx - x + 4k + 4 = 0$. Persamaan ini mempunyai penyelesaian real jika dan hanya jika $1 - 16k(k+1) \geq 0$ yang mempunyai solusi $r_1 \leq k \leq r_2$ dengan $r_1 + r_2 = -1$. Dengan demikian, $a + b = -1$.

18. Suatu ras alien mempunyai suatu bahasa unik yang hanya terdiri dari dua huruf X dan Z. Dalam bahasa ini, setiap kata paling sedikit terdiri dari satu huruf dan tidak lebih dari 11 huruf. Untuk setiap dua kata, jika kata pertama dan kedua dituliskan berdampingan maka hasilnya bukan merupakan kata. Sebagai contoh jika XXZ dan $ZZZZX$ adalah kata, maka $XXZZZZZX$ bukan kata. Maksimal banyak kata dalambahasa ini adalah ....

Solusi: $\boxed{\mathbf{2^{12} - 2^6}}$ Banyaknya seluruh kata yang mungkin yang memenuhi syarat pertama adalah : $2 + 2^2 + \cdots + 2^{11} = 2^{12} - 2$. Jika bahasa Alien tidak mengandung kata dengan 6 huruf maka banyaknya kata alien adalah $2^{12} - 2^6 - 2 < 2^{12} - 2^6$. Jika bahasa Alien mengandung kata s dengan 6 huruf maka untuk setiap kata t yang terdiri 5 huruf atau kurang maka st bukan kata yang valid. Dengan demikian jika terdapat k buah kata yang valid yang terdiri dari 1 sampai dengan 5 huruf, maka terdapat k kata yang tidak valid yang terdiri dari 7 sampai dengan 11 huruf (ketika menggabunggkannya dengan t). Dalam situasi ini maksimal ada sebanyak: $k + 2^6 + (2^7 + \cdots + 2^{11} - k) = 2^6 + 2^7 + \cdots + 2^{11} = 2^{12} - 2^6$ kata. Perhatikan bahwa $2^{12} - 2^6$ ini bisa tercapai, yakni kalau kita mengambil semua kata dengan banyak huruf 6 atau lebih yaitu sebanyak $2^6 + 2^7 + \cdots + 2^{11} = 2^{12} - 2^6$. Dua kata yang seperti ini jika digabungkan akan menghasilkan sebuah kata dengan banyak huruf 12 atau lebih yg jelas bukan kata yg valid. Jadi jelas ke $2^{12} - 2^6$ kata ini memenuhi syarat.

19. Suatu segitiga lancip ABC memiliki panjang sisi bilangan bulat. Diketahui $AC = BD$ dengan D adalah titik pada garis BC sehingga AD tegak lurus BC. Nilai terkecil panjang sisi BC yang mungkin adalah ....

Solusi: $\boxed{6}$ Jelas bahwa $a > b$ dan $c > b$.. Syarat pada soal terpenuhi jika dan hanya jika

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{AC}{AD} = \frac{BD}{AD} = \frac{\cos B}{\sin B},$$

jika dan hanya jika

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c},$$

jika dan hanya jika $a^2 + c^2 - b^2 = 2ab$ jika dan hanya jika $2a^2 = (a+b)^2 - c^2$. Karena ruas kiri genap maka $(a + b)$ dan c paritasnya sama yang berakibat bahwa $2a^2$ kelipatan 4 yang tentu saja terjadi hanya jika a genap.

- Untuk $a = 2$ haruslah $b = 1$ sehingga $c = 1$ bukan merupakan sisi-sisi segitiga.
- Untuk $a = 4$ haruslah $b \leq 3$ yang berakibat tidak ada bilangan bulat c yang memenuhi.
- Untuk $a = 6$ haruslah $b \leq 5$ yang menghasilkan $c = 3$ untuk $b = 3$ dan $c = 7$ untuk $= 5$.

Dengan demikian, nilai terkecil bagi a adalah 6.

20. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, sedangakan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Bilangan asli terbesar n sehingga

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27\lceil x \rceil$$

memiliki solusi real x adalah ....

Solusi: $\boxed{15}$ Jika x bulat, maka

$$\begin{aligned} 50x - x^2 = 50\lfloor x \rfloor - \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor &= 100n - 27\lceil x \rceil = 100n - 27x \\ x^2 - 77x + 100n &= 0 \end{aligned}$$

Memiliki solusi bulat (real) jika $77^2 - 400n \geq 0$. Maka $n \leq \frac{5929}{400} < 15$. Untuk $n = 13$, diperoleh

$$0 = x^2 - 77x + 1300 = (x - 25)(x - 52)$$

solusi real ada. Jadi $n \geq 13$.

Jika x tidak bulat, maka

$$\begin{aligned} 50\lfloor x \rfloor - \lfloor \lfloor x \rfloor^2 + \epsilon \lfloor x \rfloor \rfloor &= 50\lfloor x \rfloor - \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 100p - 27\lceil x \rceil = 100n - 27(\lfloor x \rfloor + 1) \\ 50\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor^2 - \lfloor \epsilon \lfloor x \rfloor \rfloor &= 100n - 27\lfloor x \rfloor - 27 \end{aligned}$$

Akibatnya, $\lfloor x \rfloor^2 - (77 - \alpha)\lfloor x \rfloor + 100n = 0$ untuk suatu $0 < \alpha < 1$, sehingga

$$(77 - \alpha)^2 - 4(100n - 27) < 77^2 - 4(100n - 27) < 0$$

untuk $n \geq 16$.

Untuk $n = 15$ berlaku, $(77 - \alpha)^2 - 5892 > 0$ untuk $0 < \alpha < 77 - \sqrt{5892}$.

BAGIAN KEDUA

1. Sejumlah n siswa duduk mengelilingi suatu meja bundar. Diketahui siswa laki-laki sama banyak dengan siswa perempuan. Jika banyaknya pasangan 2 orang yang duduk berdampingan dihitung, ternyata perbandingan antara pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin sama dan pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin berbeda adalah 3 : 2. Tentukan minimal n yang mungkin.

   Solusi: Siwa laki-laki sama banyaknya dengan siswa perempuan maka n genap. Selain itu, perhatikan bahwa hanyaknya pasangan berbeda (tanpa memperhatikan urutan berpasangan) sama dengan banyaknya total siswa yang berarti bahwa n juga kelipatan 5. Ini berarti bahwa n haruslah kelipatan 10. Untuk $n = 10$, susunan $P, P, P, P, L, L, L, L, P, L$ memenuhi kondisi pada soal. Jadi n terkecil yang dimaksud adalah $n = 10$.

2. Misalkan a, b, dan c bilangan bulat positif sehingga

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}.$$

   Buktikan bahwa c adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

   Solusi: Perhatikan bahwa

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b} = a + \frac{b^2 - a}{ab}.$$

   Karena c bilangan bulat maka b membagi $b^2 - a$. Sehingga b membagi a. Tulis $a = kb$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Diperoleh

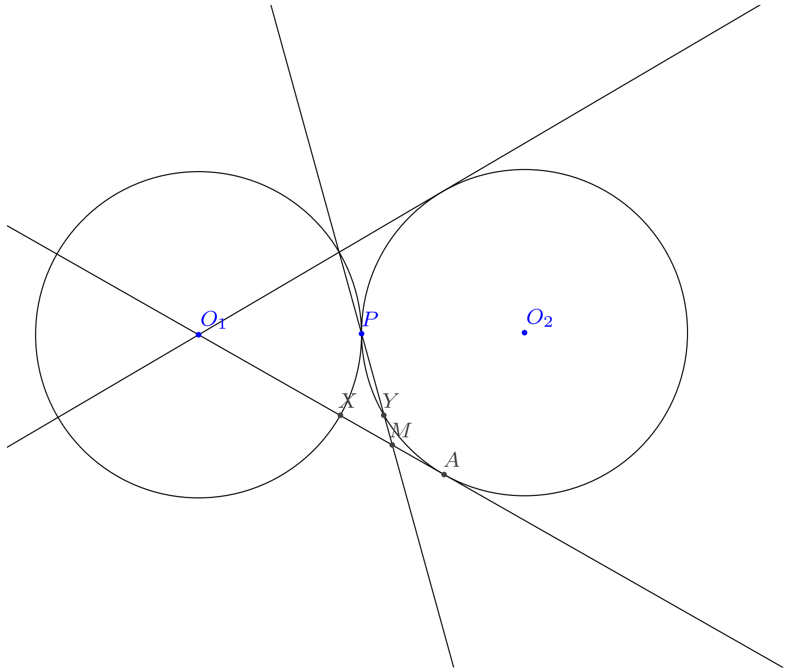
$$\frac{b^2 - a}{ab} = \frac{b^2 - kb}{ab} = \frac{b - k}{bk}.$$

   Akibatnya $b - k$ harus terbagi oleh b dan k. Dengan demikian, b membagi k dan k membagi b. Sehingga $b = k$. Oleh karena itu $a = b^2$ dan diperoleh

$$c = a + \frac{b^2 - a}{ab} = \frac{b^2 - b^2}{ab} = b^2.$$

3. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di titik O_1 dan O_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik P. Garis ℓ melalui O_1 menyinggung Γ_2 di titik A. Garis ℓ memotong Γ_1 di titik X dengan X di antara A dan O_1. Misalkan M titik tengah AX dan Y titik potong PM dengan Γ_2 dengan $Y \neq P$. Buktikan bahwa XY sejajar O_1O_2.

   Solusi: Misalkan O titik pusat lingkaran luar PXY' dengan Y' adalah perpotongan Γ_2 dengan garis yang melalui X sejajar O_1O_2. Akibatnya OP menyinggung Γ_1. Karena $OP = OX$ dan X di Γ_1 maka OX menyinggung Γ_1 sehingga $OX \perp AX$. selanjutnya kita juga punya AX menyinggung lingkaran luar PXY'. Misalkan M' titik potong PY' dengan AX. Berdasarkan kuasa titik M' terhadap Γ_2 maupun lingkaran luar PXY' diperoleh $M'A^2 = M'Y' \cdot M'P = M'X^2$ maka M' titik tengah AX. Jadi $Y = Y'$ sehingga XY sejajar O_1O_2.

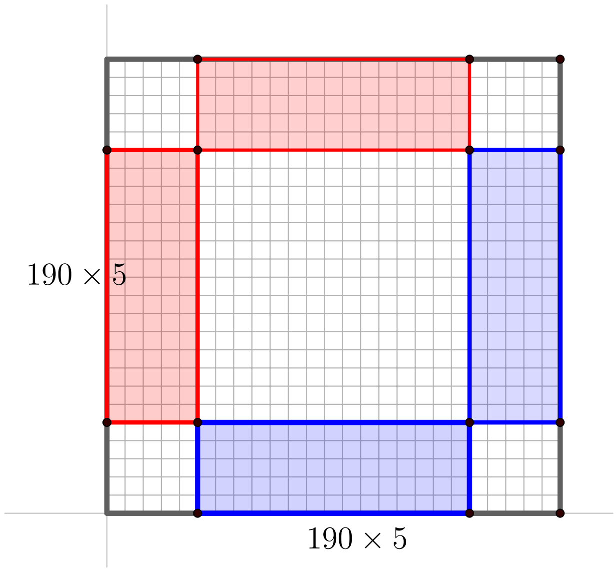


4. Misalkan a, b, c bilangan real positif dengan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Buktikan bahwa
$$a+b+c+\frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}}\geq 5$$

   Solusi: Berdasar $AM-HM$ maka
$$t\frac{\sum a}{3}\geq\frac{3}{\sum\frac{1}{a}}=1$$
   dan
$$\frac{\sum a}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$$
   Dari soal
$$\sum a+\frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}}\geq 3t+\frac{4}{1+t^2}$$
   Bentuk terakhir lebih dari 5 didapat dari $(t-1)(3t^2+t+1)\geq 0$.

5. Pada papan catur berukuran 200×200 persegi satuan diletakkan kelereng merah atau biru sehingga setiap persegi satuan memiliki paling banyak 1 buah kelereng. Dua kelereng dikatakan segaris jika mereka terletak pada baris atau kolom yang sama. Diketahui untuk setiap kelereng merah ada tepat 5 kelereng biru yang segaris dan untuk setiap kelereng biru ada tepat 5 kelereng merah yang segaris. Tentukan maksimum banyaknya kelereng yang mungkin pada papan catur tersebut.

   Solusi: Pertama kita akan tunjukkan bahwa 3800 kelereng mungkin tercapai. Tinjau persegipanjang berukuran 5×190 atau 190×5 yang berwarna merah atau biru pada gambar di bawah. Untuk persegi berwarna merah isi semua kotak satuannya dengan kelereng berwarna merah dan demikian juga untuk persegi berwarna biru. Mudah dilihat bahwa konfigurasi ini memenuhi syarat dan terdapat $2\times 5=1900$ kelereng untuk masing-masing warna sehingga terdapat secara total 3800 kelereng.



Sebuah kolom atau baris dikatakan dwiwarna jika pada baris atau kolom tersebut terdapat kelereng berwarna merah dan biru. Pada suatu baris/kolom dwiwarna panling banyak terdapat 5 kelereng merah dan 5 kelereng biru (jika lebih maka akan melanggar syarat bahwa setiap kelereng merah/biru segaris dengan 5 kelereng warna berbeda). Jadi untuk setiap baris/kolom dwiwarna maksimal berisi 10 buah kelereng.

Jika terdapat $190 + x$ baris dwiwarna dengan $x \geq 1$, maka banyaknya kelereng tidak lebih dari $(190 + x).10$ ditambah dengan sisa baris sebanyak $10 - x$ yang masing-masingnya kita asumsikan berisi penuh 200 kelereng. Jadi maksimal ada sebanyak $(190+x)\cdot 10+(10-x)\cdot 200 = 3900 - 190x \leq 3900 - 190 < 3800$ kelereng. Dengan demikian paling banyak terdapat 190 baris dwiwarna demikian juga dengan kolom dwiwarna.

Dengan syarat yang diberikan perhatikan bahwa setiap kelereng pasti termuat pada suatu kolom atau baris dwiwarna. Karena secara total maktsimal terdapat 380 kolom dan baris dwiwarna dengan masing-masingnya maksimal berisi 10 kelereng maka maksimal terdapat $380 \cdot 10 = 3800$ kelereng.